

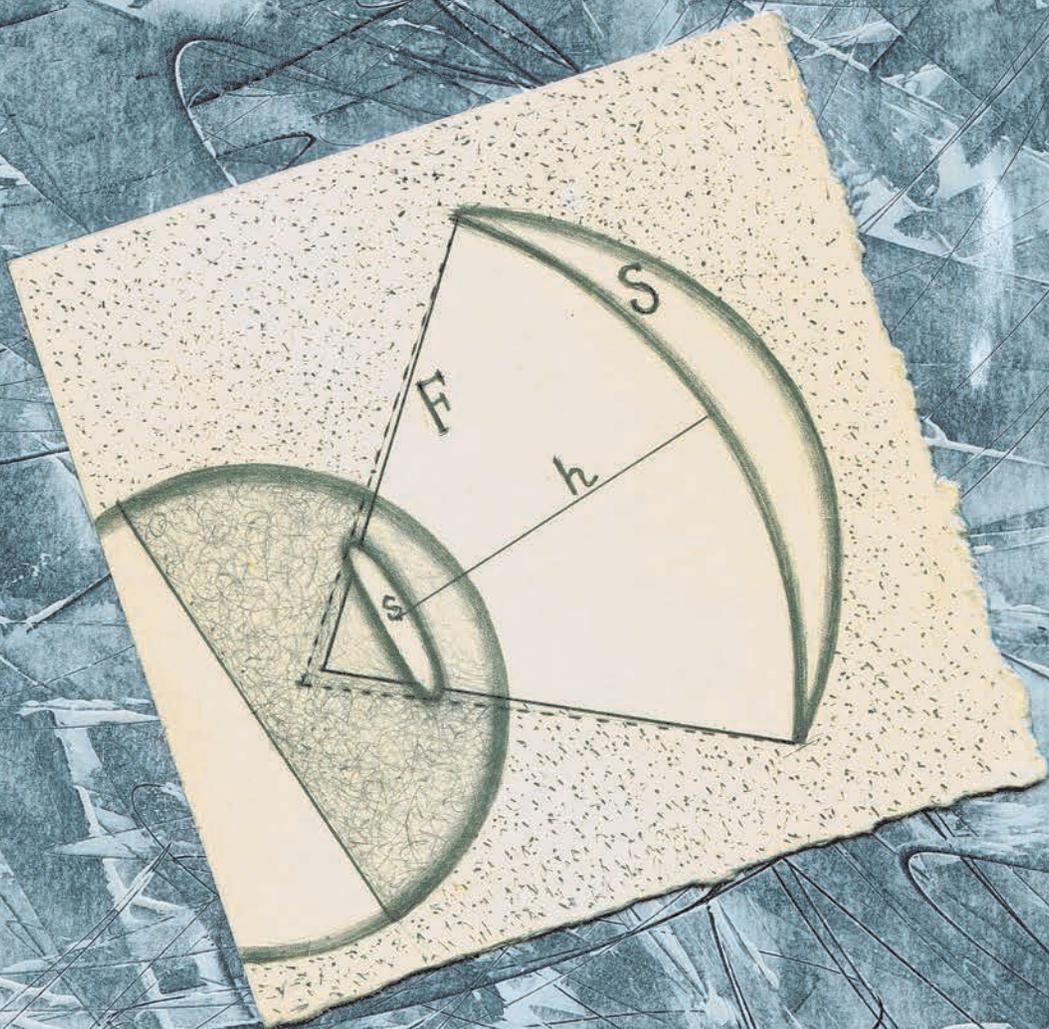
АПРЕЛЬ

ISSN 0130-2221

2018 · № 4

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





# ВОЛШЕБНЫЕ ФИГУРЫ

Эта замечательная головоломка выпускалась еще в СССР. Замечательная она потому, что, с одной стороны, ее очень легко сделать самому, а с другой – как и подобает настоящей головоломке – ее не так-то просто решить. Она состоит из четырех кубиков, грани которых покрашены в четыре цвета: синий, красный, желтый и зеленый. На рисунке показаны развертки этих кубиков, так что вы можете либо склеить их из бумаги, либо взять готовые кубики из какого-нибудь набора и раскрасить их грани.

Заданий сразу несколько.

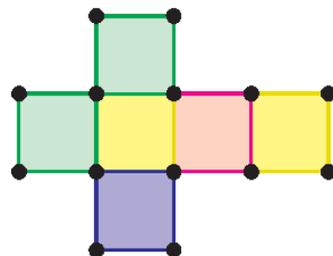
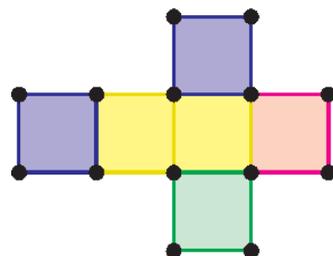
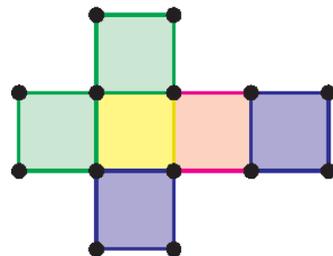
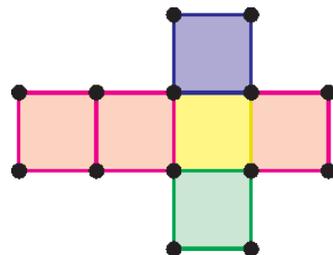
- 1) Сложите из кубиков параллелепипед  $2 \times 2 \times 1$ , у которого каждая боковая грань  $2 \times 1$  будет одноцветной и все их цвета будут разными, а на верхней грани будут присутствовать все четыре цвета.
- 2) Задание аналогично первому, только верхняя грань параллелепипеда  $2 \times 2 \times 1$  должна быть одноцветной.
- 3) Сложите из кубиков параллелепипед  $4 \times 1 \times 1$ , у которого на каждой боковой грани  $4 \times 1$  встретятся все четыре цвета.

Следующее задание, вероятно, самое интересное. Дело в том, что в картонном дне коробки от головоломки есть три треугольных отверстия. Это позволяет установить кубики в виде пирамидки.

- 4) Сложите пирамидку так, чтобы каждая из трех боковых граней имела один свой цвет, а три невидимые грани верхнего кубика пирамидки соответствовали бы по цвету граням кубиков, на которые он ложится. Найдите два решения.

Основываясь на принципе устройства этой головоломки, можно придумывать и свои варианты – с другой раскраской кубиков или с большим их числом.

Если вам понравится эта головоломка, то советуем заглянуть в «Квант» №6 за 1999 год, где рассказывается о близкой по духу головоломке, которую тоже легко сделать самому.



## В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белоухов,  
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,  
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,  
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников  
(заместитель главного редактора),  
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Электростатическое взаимодействие в диэлектрических средах. *С.Сырцов*  
6 Как найти сумму степеней. *Г.Мерзон*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 10 Задачи М2506–М2509, Ф2513–Ф2516  
11 Решения задач М2494–М2497, Ф2501–Ф2504  
17 Резонансный удар. *А.Власов*  
19 В защиту магнитных зарядов и магнитных диполей. *С.Варламов*

## КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

- 23 Задачи 29–32

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 24 Задачи  
25 Почему Луна не падает на Землю.  
*С.Дворянинов*

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 27 Будут ли на Марсе яблони цвести. *Ю.Брук, А.Стасенко*  
29 Где ошибка? (Задачи на целые числа и текстовые задачи)

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика+география

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 34 Вращение от вибрации. *М.Старшов*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 36 И снова котенок на лестнице. *И.Акулич*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 41 Теорема об изогоналях. *А.Куликова, Д.Прокопенко*

## ОЛИМПИАДЫ

- 45 Московский тур Всероссийской студенческой олимпиады по физике 2017 года

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 47 Олимпиада «Ломоносов-2018». Физика

- 52 Ответы, указания, решения

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Ю.Брука и А.Стасенко*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогнулки с физикой*

# Электростатическое взаимодействие в диэлектрических средах

С. СЫРЦОВ

**О**ПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ на заряженные тела, является основной задачей электростатики. Да и сама электростатика как наука возникла лишь после того, как Шарлем Кулоном в 1785 году был установлен закон, позволяющий рассчитать силу взаимодействия двух заряженных неподвижных маленьких бузиновых позолоченных шариков в пустоте (вакууме):

$$F_0 = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1)$$

Здесь  $q_1$ ,  $q_2$  – заряды шариков,  $r$  – расстояние между ними,  $k = = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$ . Вскоре был экспериментально установлен и другой основной закон электростатики – принцип суперпозиции, согласно которому сила взаимодействия двух точечных зарядов не изменяется в присутствии других зарядов и сила, действующая на заряд со стороны других точечных зарядов, равна сумме сил, действующих на него со стороны каждого из них при отсутствии других.

Чтобы было более понятно, как заряды «дотягиваются» и действуют друг на друга, Майклом Фарадеем было придумано электрическое поле. Напомним, что в любой точке пространства поле характеризуется двумя параметрами – силовым, т.е. вектором напряженности  $\vec{E}$ , и энергетическим, т.е. потенциалом  $\phi$ . В случае точечного заряда  $Q$  эти параметры определяются выражениями

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^3} \vec{r} \quad \text{и} \quad \phi = k \frac{Q}{r},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, соединяющий за-

ряд с точкой пространства. На языке  $\vec{E}$  и  $\phi$  принцип суперпозиции приобретает вид

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots, \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots,$$

т.е. поля различных зарядов накладываются друг на друга. Если поле в данной точке пустого пространства определено, то при помещении в нее точечного заряда  $q$  он приобретает энергию

$$W = q\phi$$

и на него начинает действовать сила

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (2)$$

В частности, для двух точечных зарядов отсюда естественным образом вытекает закон Кулона.

Но все это *верно в пустоте*. В реальной же жизни зарядам часто приходится создавать поля и взаимодействовать с их помощью, находясь в определенной среде, т.е. в присутствии других тел. Понятно, что в этом случае поля и силы, действующие на заряженные частицы, должны отличаться от своих «пустотных» значений. К кулоновской силе  $F_0$  (она, согласно принципу суперпозиции, всегда остается неизменной) добавляются силы со стороны частиц среды, неизбежно возникающие при размещении в ней зарядов. Ведь частицы среды, смещаясь<sup>1</sup> под влиянием внесен-

<sup>1</sup> Заряды среды могут смещаться на небольшие (в диэлектриках) или значительные (в металлах) расстояния. В металлах такое перераспределение зарядов во внешнем поле называется электростатической индукцией, а в диэлектриках – поляризацией.

ных в нее зарядов, создают добавочное поле. В результате напряженность в тех точках среды, куда мы помещаем заряды, может существенно отличаться от своего изначального значения.

Продолжателем дела Фарадея – Джеймс Клерк Максвелл – вывел свои знаменитые уравнения, которым подчиняются  $\vec{E}$  и  $\Phi$  в среде. Решение этих уравнений дело непростое и требует знания высшей математики, поэтому о них в школе стараются не вспоминать. Не будем делать этого и мы. Но об одном важном для нас в дальнейшем следствии из этих уравнений мы обязаны упомянуть: *если при фиксированном положении зарядов все пространство, где есть электрическое поле, заполнить однородным диэлектриком, то напряженность и потенциал уменьшаются в  $\epsilon$  раз по сравнению со значениями в пустоте*. Здесь  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость, характеризующая способность среды реагировать на электрические воздействия (поляризоваться). Соответственно, решения всех задач электростатики по расчету поля в вакууме могут быть переписаны в диэлектрической среде формальной заменой всех зарядов  $q_i$  на  $\frac{q_i}{\epsilon}$ .

Но это если *все пространство* с полем заполнено диэлектриком. А если только половина? Или, например, между двумя точечными зарядами помещен диэлектрический шарик? В этих случаях переписывание «пустотных» решений невозможно и поле рассчитать гораздо сложнее. Более того, даже если нам удастся все аккуратно учесть и определить напряженность  $\vec{E}$  в месте расположения заряда  $q$ , совсем не факт, что нам удастся затем определить силу, действующую на него, как  $q\vec{E}$ . Ведь каким бы маленьким ни был точечный заряд – это физический объект, и он имеет поверхность, на которой взаимодействует с частицами среды.

К сожалению, упрощенное изложение вопросов взаимодействия заряженных тел в диэлектрических средах, практикуемое в рамках школьной программы по физике, часто приводит к формированию у учеников искаженного понимания реального

положения вещей. Следствием этого, в частности, у подавляющего большинства окончивших школу (и даже институт) является уверенность в том, что электрические взаимодействия в диэлектрической среде *всегда ослабляются*. На самом деле это не совсем правильно.

Далее мы рассмотрим несколько простых и наглядных примеров, иллюстрирующих влияние диэлектрических сред на электрические взаимодействия. Там, где возможно, приведем выражения, по которым можно оценить величину этого влияния. Когда это сделать не удастся, ограничимся качественной оценкой эффектов.

Но прежде сделаем несколько замечаний о зарядах и о поляризации.

1) Заряды делятся на: а) *сторонние* – они хотя и находятся в пределах диэлектрика, но не входят в состав его молекул (или расположены за пределами диэлектрика и создают внешнее поле); б) *связанные*, или *поляризационные* – они не могут покидать пределы молекул, в состав которых входят, и при поляризации способны смещаться только на небольшие (атомные) расстояния. Часто применяемый нами термин «точечный заряд» означает, что размерами тела в данном случае можно пренебречь, а его форма и распределение в нем заряда не играют никакой роли.

2) При поляризации общий заряд образца *не меняется*. Внутри однородного диэлектрика связанные заряды противоположного знака компенсируют друг друга. Компенсация отсутствует только на поверхности диэлектрика или на границе раздела двух сред – здесь суммарная плотность поляризационных зарядов отлична от нуля.

Начнем с примера, имеющего ключевое значение для понимания причин изменения поля в диэлектрике по сравнению с вакуумом.

**Пример 1.** *Как определить характеристики электрического поля точечного заряда в неограниченной однородной диэлектрической среде?*

Этот пример интересен тем, что позволяет наглядно объяснить ослабление поля точечного заряда поляризационными зарядами прилегающего к нему диэлектрика.

«Увеличенный» точечный заряд  $q > 0$  изобразим в виде шарика (рис.1). Поле

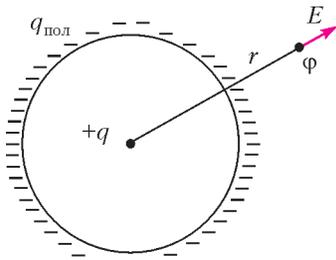


Рис. 1

заряда оказывает ориентирующее действие на окружающие его молекулы диэлектрика – на его поверхности, примыкающей к шарика, выступают отрицательные поляризационные заряды величиной  $q_{\text{пол}}$ . Очевидно, что теперь поле в любой точке пространства создается двумя противоположно заряженными сферами и его ослабление (в  $\epsilon$  раз) может быть истолковано как результат частичной экранировки поля заряда  $q$  в пустоте. Мы уже отмечали, что оно эквивалентно полю точечного заряда величиной  $q^* = \frac{q}{\epsilon}$ , поэтому теперь

$$\vec{E} = k \frac{q}{\epsilon r^3} \vec{r} \quad \text{и} \quad \varphi = k \frac{q}{\epsilon r}.$$

Нетрудно найти и величину поляризованных зарядов, приводящих к изменению поля:

$$q_{\text{пол}} = q - q^* = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} q.$$

При рассмотрении мы игнорировали влияние положительных поляризационных зарядов (суммарной величиной  $+q_{\text{пол}}$ ) – они располагаются на далекой внешней поверхности диэлектрика и в «игре» участия не принимают. В диэлектрической среде конечных размеров их влиянием, конечно, пренебрегать нельзя.

Теперь рассмотрим другой важный и поучительный пример.

**Пример 2.** Точечные заряды  $q_1$  и  $q_2$  расположены в однородной жидкой (газообразной) диэлектрической среде с проницаемостью  $\epsilon$ . Нужно найти: а) силу электростатического взаимодействия

между зарядами; б) силу, действующую на каждый из зарядов.

Любую среду (вещество) можно рассматривать как вакуум, испорченный вкрапленными в него зарядами ядер и электронов. Как эти вкрапления влияют на взаимодействие между нашими зарядами? Ответ на этот вопрос дает принцип суперпозиции. И ответ следующий: *никак не влияют!* Не важно, где и как расположены наши точечные заряды, – достаточно знать расстояния между ними и помнить формулу (1).

Казалось бы, и ответ на второй вопрос не должен вызывать затруднения. Ведь мы уже знаем, как найти напряженность одного из зарядов, например  $q_1$ , в месте расположения второго,  $q_2$ . Значит, и сила, действующая на  $q_2$ , согласно соотношению (2), должна быть равной

$$F_2 = q_2 E_1 = q_2 \cdot k \frac{q_1}{\epsilon r^2} = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}. \quad (3)$$

Однако, не все так просто! Во-первых, если быть последовательным, то при введении в среду второго заряда надо учитывать и возникающие вокруг него поляризационные заряды. Во-вторых, носителем заряда всегда выступает определенный физический объект и, каким бы маленьким этот объект ни был, у него есть поверхность, которой он контактирует с частицами среды. А частицы жидкости не остаются безучастными к происходящему и за счет сил гидростатического давления стремятся воздействовать на заряженные частицы. Все это соотношение (2), конечно, учесть не может – надо считать по-другому. Многие выдающиеся физики, включая Максвелла, на протяжении многих лет, дополняя и поправляя друг друга, считали. И получили любопытный результат – оказывается, что *результатирующие электрических и механических сил*, действующие на каждый из зарядов, действительно определяются по формуле (3). Это и есть ответ на второй вопрос задачи. Но выдавать полученное соотношение за «закон Кулона в диэлектрической среде», конечно же, неправильно.

То, что силы, действующие в диэлектри-

ческой среде на заряженные тела, нельзя определить, рассматривая только взаимодействие между сторонними и связанными зарядами, убедительно демонстрирует и следующий пример с участием популярного в школе плоского конденсатора.

**Пример 3.** *Разноименные заряды величиной  $Q$  на обкладках плоского конденсатора создают в нем поле напряженностью  $\vec{E}_0$ . Определите силы, действующие на обкладки, если: а) конденсатор находится в воздухе; б) конденсатор помещен в однородную жидкость с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ .*

Вначале рассмотрим, что происходит в воздухе. Из школьного курса известно, что заряд каждой из пластин создает внутри конденсатора напряженность  $E_1 = E_2 = \frac{E_0}{2}$ . На каждую из пластин действует только сила электростатического притяжения их зарядов, равная  $F_0 = QE_0/2$ . Это и есть ответ на первый вопрос.

Не меняя величину зарядов на обкладках, погрузим конденсатор в жидкость. Как мы уже знаем, напряженность при этом уменьшится в  $\epsilon$  раз:  $E = \frac{E_0}{\epsilon}$ . Понятно нам (из примера 1) и причина этого уменьшения – на поверхности диэлектрика появляются поляризационные заряды величиной  $Q_{\text{пол}} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} Q$ , создающие поле, направленное противоположно полю  $E_0$  (рис.2). Изменение поля внутри конденсатора не должно сказываться на электростатических силах, действующих на каждую из обкладок конденсатора. Однако теперь этой силой дело не ограничивается – есть еще молекулы жидкости, контактирующие с обкладками. Под влиянием неоднородного электрического поля на краях конденсатора они втягиваются в него, способствуют увеличению давления в жидкости. В результате создается дополнительная механическая сила  $F_{\text{ж}}$ , расталкивающая пластины.

Как и в примере 2, результирующая сила, действующая на обкладки, теперь не является чисто электрической, а определяется разностью кулоновской и гидростати-

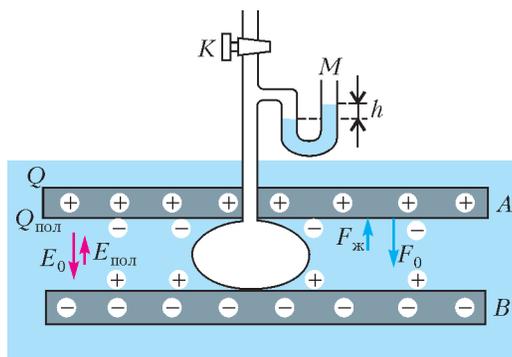


Рис. 2

ческой сил. Точный расчет величины этой силы дает ее уменьшение именно в  $\epsilon$  раз:

$$F = F_0 - F_{\text{ж}} = \frac{F_0}{\epsilon}.$$

Часто, не вдаваясь в детали, изменение силы объясняют по-простому – раз напряженность поля внутри конденсатора уменьшается, значит, и действует такое поля на заряд обкладок слабее. Конечно, это не так – обкладки расположены вне диэлектрика, где действие поляризационных зарядов не ощущается.

То, что все выше сказанное действительно имеет место быть, подтверждает эксперимент, схема которого представлена на рисунке 2. Через вертикальную трубку в пространство между двух горизонтальных пластин, заполненное жидкостью, вдувается воздух для образования пузыря (после чего кран  $K$  закрывается). При разноименной зарядке пластин  $A$  и  $B$  происходит втягивание жидкости в пространство между ними, приводящее к увеличению давления в воздушном пузыре. По величине возникающей разности уровней  $h$  в коленях манометра  $M$  можно определить изменение давления в жидкости и рассчитать величину уменьшения силы, действующей на пластины. Если пластины зарядить одноименно, то давление в пузыре уменьшится – жидкость теперь будет выталкиваться из пространства между пластинами наружу. Сила отталкивания пластин при этом уменьшится (и опять в  $\epsilon$  раз!).

(Продолжение следует)

# Как найти сумму степеней

Г. МЕРЗОН

КАК ВЫЧИСЛИТЬ СУММУ ЧИСЕЛ ОТ 1 до  $n$ , хорошо известно: если сложить первое число с последним, второе с предпоследним и т.д., получается формула  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Но уже формулы для суммы первых нескольких квадратов, кубов или четвертых степеней менее известны, причем обычно с ними знакомят, сразу предлагая *доказать* неизвестно откуда взявшийся ответ.<sup>1</sup>

Попробуем, наоборот, сначала понять, как найти утверждения, которые можно было бы доказывать (а уже потом кое-что, быть может, докажем).<sup>2</sup>

Начнем с сумм квадратов. Выпишем первые несколько из них:  $1^2 + 2^2 = 5$ ,  $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \dots$  В последовательности 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140... никакой закономерности, кажется, не видно (кроме того, конечно, что соседние числа отличаются на очередной квадрат). Хотелось бы как-то опереться на уже понятный случай – вычисление суммы  $1 + \dots + n$ . Запишем эти две последовательности сумм вместе (табл. 1).

Уже можно уловить наличие некоторой связи между двумя строками: для  $n = 4$

Таблица 1

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$1 + \dots + n$	1	3	6	10	15	21	28
$1^2 + \dots + n^2$	1	5	14	30	55	91	140

нижнее число втрое больше верхнего, дальше, правда, такой делимости не видно (по крайней мере, до  $n = 7$ ), но некоторые общие делители у чисел в одном столбце видны – это 5 для  $n = 5$ , 7 для  $n = 6$  и  $n = 7 \dots$  Раз у чисел в одном столбце бывает большой общий множитель, запишем под каждым столбцом отношение чисел (табл. 2).

Таблица 2

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$1 + \dots + n$	1	3	6	10	15	21	28
$1^2 + \dots + n^2$	1	5	14	30	55	91	140
$S_2/S_1$	1	5/3	7/3	3	11/3	13/3	5

Теперь закономерность видна: с увеличением  $n$  на 1 частное  $S_2/S_1$  увеличивается на  $2/3$ , т.е. оно равно  $(2n+1)/3$ . Вместе с формулой для  $1 + 2 + \dots + n$  это дает следующее.

**Гипотеза 1:**

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Отметим, что вычислительного эксперимента хватило небольшого и несложного. А вот осмысленное *представление информации* было очень существенно: если просто взять тетрадку и в случайных местах выписать разные суммы последовательных чисел и разные суммы квадратов, то заметить какую-либо закономерность малореально.

Попробуем продвинуться чуть дальше. Для этого вычислим несколько первых сумм кубов и несколько первых сумм четвертых степеней.

<sup>1</sup> Известны, конечно, и разные варианты *геометрического суммирования*. К сожалению, если для суммирования квадратов еще получается непосредственно обобщить вычисление суммы от 1 до  $n$ , то уже для суммы кубов вместо непонятно как полученного ответа сообщается, фактически, непонятно откуда взявшееся готовое решение (изящное, но еще более загадочное).

<sup>2</sup> Разумеется, это не является самым быстрым способом «попасть из пункта А в пункт Б». Читатель, желающий побыстрее узнать формулу для суммы  $1^k + \dots + n^k$  вместе с ее доказательством, может почитать, например, статью [1].

(Читателю в этом месте предлагается **остановиться** и, не заглядывая дальше, попробовать самому выписать таблицу из нескольких значений этих сумм и попытаться что-нибудь понять!)

Видно, что с кубами дело обстоит даже проще, чем с квадратами (табл.3). Чита-

Таблица 3

$n$	1	2	3	4	5
$1 + \dots + n$	1	3	6	10	15
$1^2 + \dots + n^2$	1	5	14	30	55
$1^3 + \dots + n^3$	1	9	36	100	225
$1^4 + \dots + n^4$	1	17	98	354	979

тель, никогда раньше не видевший формулы для суммы  $S_3(n) = 1^3 + \dots + n^3$ , несомненно сможет, глядя на эту таблицу, ее угадать.

У  $S_4(n)$  и  $S_1(n)$  общих делителей (кроме 2) уже не видно. Но все же посмотрим: 98 явно делится на 7, как и соответствующая сумма квадратов 14; у 30 и 354 есть общий делитель 6; 979 и 55 делятся на 11... – видимо, на этот раз полезно посмотреть на отношение  $S_4/S_2$  (табл.4).

Таблица 4

$n$	1	2	3	4	5	6
$S_2$	1	5	14	30	55	91
$S_4$	1	17	98	354	979	2275
$S_4/S_2$	1	17/5	7	59/5	89/5	25

Видно, что после домножения этого отношения на 5 получится последовательность целых чисел: 5, 17, 35, 59, 89, 125... Тут уже нельзя сказать, что разность соседних чисел неизменна. Все же посмотрим на эти разности: 12, 18, 24, 30... – закономерность сразу видна!

**Упражнение 1.** Предложите формулу<sup>3</sup> для суммы  $1^4 + \dots + n^4$ .

<sup>3</sup> Здесь и дальше «предложите формулу» означает, что достаточно найти правдоподобную (согласующуюся с имеющимися наблюдениями) гипотезу, доказательство не требуется.

Отметим, что в отличие от формул для  $S_1(n)$ ,  $S_2(n)$  и  $S_3(n)$  формула  $S_4(n)$  не раскладывается на линейные множители. Вероятно, с этим связано и то, что ее невозможно (насколько известно автору) найти методами геометрического суммирования.

Двигаться практически вслепую, просто смотря на числа, получающиеся как значения наших сумм, становится тяжело. «Только теория решает, что именно можно наблюдать» – чтобы двигаться дальше, нужно понять, какого рода ответы мы надеемся получить.

Самое общее, что можно сказать, глядя на формулы для  $S_1(n)$ ,  $S_2(n)$ ,  $S_3(n)$ ,  $S_4(n)$ , – все это некоторые *многочлены*<sup>4</sup> от  $n$ . Раскроем в уже известных нам формулах все скобки и запишем их как многочлены:

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2,$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n.$$

Теперь кое-что видно сразу.

### Гипотеза 2:

$S_k(n)$  – многочлен от  $n$  вида

$$\frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \dots$$

Для гипотез про следующие коэффициенты маловато данных. (Разве что свободный член все время равен 0 – и это, пожалуй, понятно: значение  $S_k$  в нуле естественно считать нулевым как «сумму нулевого числа слагаемых».)

Но теперь понятно, как искать следующие формулы: если мы ожидаем, напри-

<sup>4</sup> Отметим, что такая точка зрения совсем не самоочевидна – скажем, можно было надеяться (по крайней мере, до формулы для  $S_4$ ) на ответ в виде произведения линейных функций.

<sup>5</sup> Многоточие заменяет члены меньших степеней.

мер, что

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + an^4 + bn^3 + cn^2 + dn,$$

то неизвестные коэффициенты можно найти по значениям  $S_5(n)$  для небольших  $n$ .

Дальше любую конкретную формулу можно попробовать доказать по индукции. Но хотелось бы все-таки понять, почему такой рецепт нахождения формул приводит к правильным ответам.

**Теорема.** Пусть  $S_k$  – такой многочлен степени  $k+1$ , что  $S_k(n) = 1^k + \dots + n^k$  для  $n = 0, 1, \dots, k+1$ . Тогда это равенство верно для всех натуральных  $n$ .

**Доказательство.** Как получается последовательность сумм степеней? Начинается она, можно считать, с нуля (для  $n = 0$ ), а дальше каждый раз увеличивается на  $n^k$ . Значит, нам нужно доказать, что при увеличении аргумента многочлена  $S_k$  на единицу, от  $n-1$  до  $n$ , значение этой функции увеличивается на  $n^k$ :

$$S_k(n) - S_k(n-1) = n^k.$$

Но для  $n = 1, \dots, k+1$  это равенство верно по условию. А в обеих частях равенства стоят *многочлены степени не выше  $k$*  (почему это верно про левую часть, кстати?). Значит, эти многочлены равны (их разность равна нулю, так как имеет степень не выше  $k$ , но больше  $k$  корней), что и требовалось доказать.<sup>6</sup>

В частности, теперь доказаны формулы, найденные нами экспериментально.

Теперь для любого конкретного  $k$  мы можем, в принципе, найти формулу для суммы  $1^k + 2^k + \dots + n^k$ . Можно было бы на этом остановиться, но хотелось бы понять, как связаны ответы для разных  $k$  (а в идеале – найти в том или ином смысле общую формулу, работающую для произвольного  $k$ ).

Для этого полезно найти несколько следующих формул. Решать возникающие системы уравнений вручную быстро становится утомительным, имеет смысл вос-

пользоваться компьютером (уже и для  $k = 5$ ). В конце статьи приведена короткая программа, составляющая и решающая соответствующую систему уравнений.

Одна вещь после взгляда на результаты компьютерного эксперимента видна хорошо:

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + 0,$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + 0 - \frac{1}{30}n,$$

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 + 0 - \frac{1}{12}n^2 + 0,$$

$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{5}{12}n^5 + 0 - \frac{1}{6}n^3 + 0 + \frac{1}{42}n,$$

$$S_7(n) = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 + 0 - \frac{7}{24}n^4 + 0 + \frac{1}{12}n^2 + 0,$$

$$S_8(n) = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 + 0 - \frac{7}{15}n^5 + 0 + \frac{2}{9}n^3 + 0 - \frac{1}{30}n.$$

### Гипотеза 3:

после  $\frac{1}{2}$  каждый второй коэффициент (при  $n^{k-2}$ ,  $n^{k-4}$ , ...) многочлена  $S_k(n)$  равен 0.

Как эту гипотезу доказать? Знаем ли мы хоть какое-нибудь похожее утверждение? Известно, что *все* коэффициенты при четных/нечетных степенях многочлена равны нулю тогда и только тогда, когда этот многочлен является нечетной/четной функцией. Это подсказывает, что стоит изучить следующий вопрос.

**Упражнение 2.** Чему равно значение многочлена  $S_k$  в точке  $-n$ ? Как оно связано со значениями  $S_k$  в целых положительных точках? (Если ответить не получается, перечитай-те доказательство теоремы.)

Отметим, что для аргумента, не являющегося целым положительным числом,

<sup>6</sup> Автор благодарен Ф.В.Петрову, рассказавшему такое доказательство.

$S_k(x)$  уже не является какой-либо суммой (что могли бы значить, например, слова «сумма  $k$ -х степеней последовательных чисел от 1 до  $\sqrt{2}$ ») – но значение *многочлена*  $S_k$  в точке  $x$  определено в любом случае. Так что это пример вопроса, который невозможно было даже задать, пока мы думали в терминах таблиц значений сумм.

**Упражнение 3.** а) Выведите из результата предыдущего упражнения гипотезу 3.

б) Докажите также, что для нечетного  $k$  функция  $S_k(n)$  является многочленом от  $u = n(n+1)/2$  (сравните с тем, что четный многочлен является многочленом от  $u = x^2$ ) – например,  $S_3(n) = u^2$ .

Остальные коэффициенты на первый взгляд кажутся довольно загадочными, но попытаемся разобраться. Начать естественно с коэффициентов при  $n^{k-1}$ :  $1/6, 1/4, 1/3, 5/12, 1/2, 7/12, 2/3 \dots$  – если закономерности не видно, то приведем их к общему знаменателю:  $2/12, 3/12, 4/12, 5/12 \dots$

**Гипотеза 4:**

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{k}{12}n^{k-1} + 0 \cdot n^{k-2} + \dots$$

Уже начинают проглядывать контуры какой-то общей (работающей для произвольного  $k$ ) формулы, не правда ли?

**Упражнение 4.** Уточните последнюю гипотезу: предложите формулу для коэффициента при  $n^{k-3}$  (если не выходит, посмотрите внимательно на треугольник Паскаля).

Дальше могут возникнуть некоторые гипотезы и про зависимость от  $k$  следующих коэффициентов. Попробуйте превратить их в удобный (не требующий решения систем уравнений) рецепт получения формулы для  $S_{k+1}(n)$  из формулы для  $S_k(n)$ .

\* \* \*

Мы только начали разговор про суммы степеней: за кадром остались все связи с геометрией, комбинаторикой, анализом; совсем не упоминался ключевой для этой задачи (но чудесным образом появляющийся в самых разных областях математики) объект – *числа Бернулли*... Несколько больше объясняется в статье [2] (в частности, там можно найти ответы на вопросы из предыдущего абзаца вместе с доказательствами).

Автор благодарен А.И.Сгибневу и Г.Б.Шабату за полезные обсуждения.

#### Список литературы

1. В.С.Абрамович. Суммы одинаковых степеней натуральных чисел. – «Квант», 1973, №5. ([http://kvant.mccme.ru/1973/05/summy\\_odinakovyh\\_stepenej\\_natu.htm](http://kvant.mccme.ru/1973/05/summy_odinakovyh_stepenej_natu.htm))
2. Г.А.Мерзон. Алгебра, геометрия и анализ сумм степеней последовательных чисел. – «Математическое просвещение», сер. 3, вып. 21 (2017). (<https://www.mccme.ru/~merzon/pscache/bernoulli-mp.pdf>)

#### Приложение

Ниже приведена программа на Python, вычисляющая коэффициенты многочленов  $S_k(n)$ .

```

from numpy          import array
from numpy.linalg  import solve
from fractions     import Fraction

def S(k,n):
    return sum([i**k for i in range(1,n+1)])

def S_poly(k):
    values      = array([S(k,n) for n in range(1,k+2)])
    equations   = array([[n**(k+1-i) for i in range(k+1)
                          ↪ ] for n in range(1,k+2)])
    return solve(equations, values)

print([str(Fraction.from_float(c).limit_denominator
          ↪ (50)) for c in S_poly(6)])

```

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2506 предлагалась на XXXIX Турнире городов, задачи M2507–M2509 предлагались на X Международной олимпиаде *Romanian Master in Mathematics*.

Задачи Ф2513 – Ф2516 предлагались на Инженерной олимпиаде школьников 2017/18 учебного года. Автор этих задач – С.Муравьев.

## Задачи M2506–M2509, Ф2513–Ф2516

**M2506.** а) Даны три натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных двух. Наименьшее общее кратное каждых двух из данных чисел делится на оставшееся третье. Обязательно ли все три числа равны?

б) Даны четыре натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных трех. Наименьшее общее кратное каждых трех из данных чисел делится на оставшееся четвертое. Докажите, что произведение данных чисел – точный квадрат.

*Б. Френкин*

**M2507.** Пусть  $ABCD$  – вписанный четырехугольник, а точка  $P$  лежит на стороне  $AB$  (рис.1). Диагональ  $AC$  пересекает отрезок  $DP$  в точке  $Q$ . Прямая, проходящая через  $P$  параллельно  $CD$ , пересекает продолжение стороны  $CB$  за точку  $B$  в точке  $K$ , а прямая, проходящая через  $Q$  параллельно  $BD$ , пересекает продолжение стороны  $CB$  за точку  $B$  в точке  $L$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $BKP$  и  $CLQ$  касаются.

*А. Кузнецов*

**M2508\***. Существуют ли два непостоянных многочлена  $P(x)$  и  $Q(x)$  с веще-

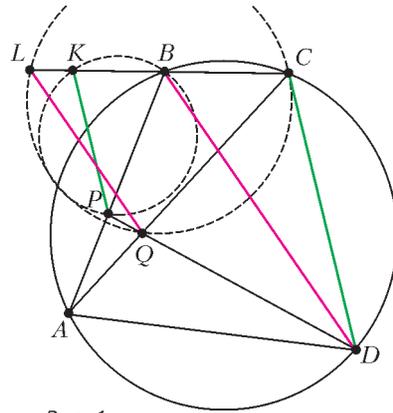


Рис. 1

ственными коэффициентами такие, что  $(P(x))^{10} + (P(x))^9 = (Q(x))^{21} + (Q(x))^{20}$ ?

*И. Богданов*

**M2509\***. Анна и Боб играют в игру на бесконечной клетчатой сетке (сторона клетки равна 1), делая ходы по очереди. Анна ходит первой. Ход состоит в том, чтобы ориентировать один из ранее не ориентированных единичных отрезков сетки. Если в какой-то момент некоторые ориентированные отрезки образуют ориентированный цикл, то выигрывает Боб. Верно ли, что у Боба есть стратегия, гарантирующая ему победу?

*М. Дидин*

**Ф2513.** Два очень длинных стержня вращаются с постоянными угловыми скоростями  $\omega$  и  $2\omega$  вокруг параллельных осей, проходящих через их концы  $A$  и  $B$  (рис.2).

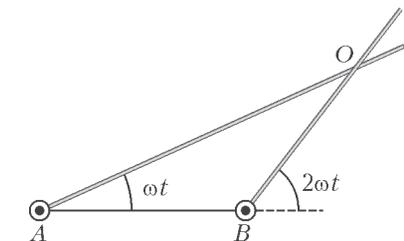


Рис. 2

Расстояние между осями  $l$ , в начальный момент оба стержня направлены направо. По какой траектории движется точка пересечения стержней  $O$ ? Найдите скорость и ускорение этой точки через время  $t = \pi/(6\omega)$  после начала движения. Ответ обоснуйте.

**Ф2514.** При проектировании подъемных машин используются механизмы, делающие невозможным обратное движение грузов при отключении их двигателей (самотормозящие).

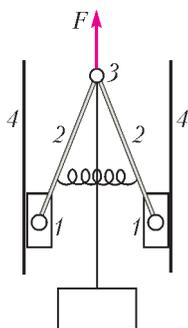


Рис. 3

На рисунке 3 показана одна из возможных конструкций такого механизма. Этот механизм состоит из двух ползунов  $1$ , совершающих скользящее движение по направляющим  $4$  и соединенных шарнирно с двумя стержнями  $2$ , которые между собой соединены шарниром  $3$ . Стержни подпружинены легкой пружиной, обеспечивающей прижатие ползунов к направляющим. Объясните принцип торможения механизма при «выключении» силы  $\vec{F}$ . При каком коэффициенте трения между ползунами и направляющими механизм будет самотормозящим? Длина стержней  $l$ , расстояние между направляющими  $3l/2$ .

**Ф2515.** По круглому стержню длиной  $l$  и радиусом  $r$  распространяется постоянный (т.е. не зависящий от времени) тепловой

поток. Распределение температуры вдоль стержня определяется соотношением  $T(x) = T_1 + T_2(x-l)^2/l^2$ , где  $x$  – координата поперечного сечения стержня; одному концу стержня отвечает координата  $x = 0$ , второму – координата  $x = l$  (рис.4),



Рис. 4

параметры  $T_1$  и  $T_2$  – положительные. Какое количество теплоты уходит в окружающую среду через боковые стенки между точками  $x = l/2$  и  $x = 3l/4$ ?

*Указание.* Количество теплоты  $q$ , переносимое в единицу времени через единицу площади тонкого слоя толщиной  $\Delta x$ , одна поверхность которого имеет температуру  $t_1$ , вторая –  $t_2$ , определяется законом  $q = \lambda(t_2 - t_1)/\Delta x$ , где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности (закон Фурье).

**Ф2516.** На рисунке 5,а показана вольт-амперная характеристика (зависимость тока от напряжения) неидеального диода

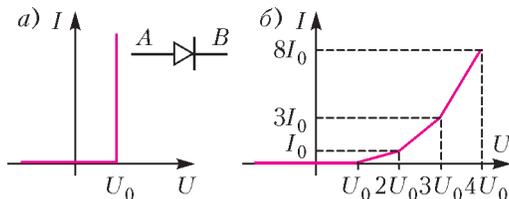


Рис. 5

и его обозначение на электрических схемах. Используя неидеальные диоды, резисторы и провода, постройте такую электрическую цепь, вольт-амперная характеристика которой показана на рисунке 5,б.

**Решения задач М2494<sup>1</sup> – М2497, Ф2501–Ф2504**

**М2494.** Доска  $20 \times 20$  покрашена в два цвета: нечетные столбцы покрашены в черный цвет, четные – в белый. На всех черных клетках стоит по одному шахматному королю. Каждым ходом один из

<sup>1</sup> Решение задачи М2493 будет опубликовано позже.

королей сдвигается на свободную соседнюю по стороне или диагонали клетку. За какое наименьшее число ходов все короли могут снова встать на черные клетки, причем так, что ни один король не окажется в клетке, в которой стоял изначально?

**Ответ:** 210.

Каждый из 200 находящихся на доске королей должен сделать хотя бы один ход. Рассмотрим один из черных столбцов. Король, который первым сделал ход среди всех королей этого столбца, за один ход не мог попасть в черную клетку, значит, он должен сделать хотя бы два хода. Итого, в каждом из десяти черных столбцов хотя бы один король обязан сделать «лишний» ход. Таким образом, должно быть сделано не меньше чем  $200 + 10$  ходов.

Пример на 210 ходов можно получить таким образом. Разобьем столбцы черных клеток на 5 пар соседних столбцов. В каждой паре столбцов сдвинем левого верхнего короля вправо, а правого нижнего короля – влево. Далее в левом столбце последовательно передвигаем королей на

1	9							1	9								
2	10							2	10								
3	11							3	11								
4	12							4	12								
5	13							5	13								
6	14							6	14								
7	15							7	15								
8	16							8	16								

2	1							2	1								
3	9							3	9								
4	10							4	10								
5	11							5	11								
6	12							6	12								
7	13							7	13								
8	14							8	14								
	16	15						16	15								

одну клетку вверх, а в правом столбце – на одну клетку вниз. Наконец, двух королей, стоящих на белых клетках, сдвигаем на черные. (На рисунке показано перемещение королей для аналогичной задачи на доске  $8 \times 8$ .) Итого, для пары столбцов сделано ровно 42 хода. Повторяя действия

для каждой из пяти пар соседних столбцов, получаем требуемое.

*Р.Ефремов*

**M2495.** а) Найдите остаток от деления числа  $(2n-1)^{(2n-1)} + (2n+1)^{(2n+1)}$  на  $(2n)^3$ .  
б) Найдите остаток от деления числа  $(2n-1)^{(2n-1)^{(2n-1)}} + (2n+1)^{(2n+1)^{(2n+1)}}$  на  $(2n)^2$  и на  $(2n)^3$ .

а) **Ответ:**  $4n^2$ .

Разложим по формуле бинома Ньютона выражение  $A = (2n+1)^{2n+1}$ , при этом здесь и далее троеточием будем обозначать выражения, заведомо делящиеся нацело на  $(2n)^3$ :

$$\begin{aligned} A &= 1 + C_{2n+1}^1 (2n) + C_{2n+1}^2 (2n)^2 + \dots = \\ &= 1 + (2n+1)(2n) + (2n+1)n(2n)^2 + \dots = \\ &= 1 + 2n + 4n^2 + 4n^3 + \dots \end{aligned}$$

Аналогично для выражения  $B = (2n-1)^{2n-1}$ :

$$\begin{aligned} B &= -1 + C_{2n-1}^1 (2n) - C_{2n-1}^2 (2n)^2 + \dots = \\ &= -1 + (2n-1)(2n) - (2n-1)(n-1)(2n)^2 + \dots = \\ &= -1 - 2n + 4n^3 + \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$A + B = 4n^2 + 8n^3 + \dots = 4n^2 + \dots$$

б) **Ответ:** остаток 0 при делении на  $(2n)^2$ ; остаток  $(2n)^3 - 4n^2$  при делении на  $(2n)^3$ . Теперь расписываем по биному  $(2n+1)^A$  и  $(2n-1)^B$ , где, как в пункте а),  $A = (2n+1)^{2n+1}$ ,  $B = (2n-1)^{2n-1}$ :

$$\begin{aligned} (2n+1)^A &= 1 + C_A^1 (2n) + C_A^2 (2n)^2 + \dots = \\ &= 1 + 2nA + (A^2 - A)2n^2 + \dots, \\ (2n-1)^B &= -1 + C_B^1 (2n) - C_B^2 (2n)^2 + \dots = \\ &= -1 + 2nB - (B^2 - B)2n^2 + \dots \end{aligned}$$

Складывая, получаем

$$\begin{aligned} (2n+1)^A + (2n-1)^B &= \\ &= 2n(A+B) + 2n^2(A^2 - A - B^2 + B) + \dots = \\ &= 2n(A+B) + 2n^2(A-B)(A+B) + \\ &\quad + 2n^2(B-A) + \dots \end{aligned}$$

Из пункта а) знаем, что  $A + B$  делится на  $(2n)^2$ , а  $B - A = -2 - 4n - 4n^2 + \dots$ . Значит, в сумме  $2n(A + B) + 2n^2(A - B)(A + B) + 2n^2(B - A) + \dots$  первые два слагаемых делятся на  $(2n)^3$ , а третье слагаемое имеет вид  $-4n^2 + \dots$ , иначе говоря, дает остаток  $(2n)^3 - 4n^2$  при делении на  $(2n)^3$ .

*В.Расторгуев*

**M2496.** На плоскости расположено нечетное количество городов так, что все попарные расстояния между ними различны. Некоторые пары городов соединены (двусторонними) авиарейсами. Оказалось, что из каждого города выходят ровно два авиарейса, причем это рейсы в два наиболее удаленных города. Докажите, что, используя авиарейсы, из любого города можно добраться до любого другого.

Рассмотрим граф  $G$ , вершины которого – города, а ребра – авиарейсы. Нам нужно показать, что граф  $G$  связный. Предположим, что  $G$  состоит из нескольких компонент связности. Мы докажем далее, что каждая компонента содержит четное количество вершин, откуда будет следовать такое утверждение.

**Лемма.** Пусть  $AB$  и  $XU$  – два ребра из разных компонент связности графа  $G$ . Тогда отрезки  $AB$  и  $XU$  пересекаются во внутренней точке.

**Доказательство.** Предположим противное, тогда имеются два случая.

1) Прямые  $AB$  и  $XU$  пересекаются во внутренней точке ровно одного из отрезков  $AB$ ,  $XU$ , для определенности пусть это отрезок  $XU$ . Можно считать (после, возможно, переименования вершин), что отрезок  $AB$  лежит внутри треугольника  $AUX$  (рис. 1). Тогда  $AB < \max(AU, XU)$  (так как один из углов  $ABX$ ,  $ABU$  точно тупой), значит, вершина  $A$  должна быть соединена хотя бы с одной из вершин  $X, U$ . Противоречие с тем фактом, что  $A$  и  $X$  (или  $U$ ) – в разных компонентах.

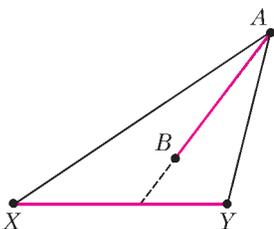


Рис. 1

2) Либо прямые  $AB$  и  $XU$  пересекаются вне отрезков  $AB$  и  $XU$  (или в одной из концевых точек  $A, B, X, U$ ), либо прямые  $AB$  и  $XU$  параллельны (или совпадают).

В любом случае можно считать (после, возможно, переименования вершин), что  $ABXU$  – выпуклый (возможно, вырожденный) четырехугольник (рис. 2), а отрезки  $AU$  и  $BX$  имеют некоторую общую точку  $O$ . Тогда

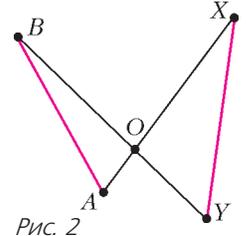


Рис. 2

$$AU + BX = (OA + OU) + (OB + OU) = (OA + OB) + (OU + OU) \geq AB + XU.$$

Следовательно, выполняется хотя бы одно из условий  $AU \geq AB$ ,  $BX \geq XU$ . Но в первом случае вершина  $A$  должна быть соединена с вершиной  $X$ , а во втором случае – вершина  $U$  с вершиной  $B$ . Противоречие.

Лемма доказана.

Вернемся к задаче. Так как каждая вершина имеет степень 2, то каждая компонента графа представляет собой цикл. Пусть  $C$  – один из таких циклов, и пусть  $XU$  – ребро графа, концы  $X$  и  $U$  которого не принадлежат циклу  $C$ . Согласно лемме, любые две последовательные вершины цикла  $C$  лежат по разные стороны от прямой  $XU$ , значит, цикл  $C$  содержит четное количество вершин. Этим завершается решение задачи. Отметим, что одна из возможных конфигураций, удовлетворяющих условию задачи, получается «малым шевелением» вершин правильного нечетногоугольника. От условия нечетности общего количества городов отказаться нельзя. Это показывает, например, следующая конструкция. Рассмотрим квадрат и расположим по паре городов вблизи каждой из его вершин. Соединим авиарейсом каждую пару городов, близких к паре противоположных вершин квадрата. Тогда граф  $G$  будет объединением двух циклов длины 4.

*И.Богданов, А.Гайфуллин*

**M2497.** Пусть  $ABCD$  – выпуклый четырехугольник. Внутри четырехугольника

выбираются пары точек  $P, Q$ , удовлетворяющие условию (рис.1)

$$\angle APB = \angle CPD = \angle AQB = \angle CQD.$$

Докажите, что всевозможные прямые  $PQ$

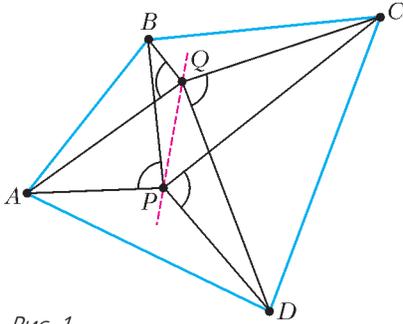


Рис. 1

проходят через фиксированную точку либо все они параллельны друг другу.

Из условия равенства углов следует, что четверки точек  $A, B, P, Q$  и  $C, D, P, Q$  лежат на окружностях, причем дуги  $APB$  и  $CPD$  этих окружностей имеют равные меры (рис. 2). В задаче утверждается, что

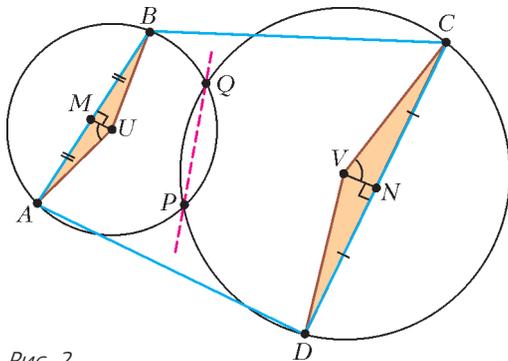


Рис. 2

прямые  $PQ$ , которые содержат общие хорды таких пар окружностей (т.е. радикальные оси пар таких окружностей), имеют фиксированную общую точку либо параллельны.

Одним из естественных путей доказательства этого факта оказывается метод координат.

Пусть  $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$  и т.д. – координаты вершин, тогда  $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$  – середина отрезка  $AB$ . Аналогично выписываются координаты середины  $N$  отрезка

$CD$ . Пусть  $U$  и  $V$  – центры окружностей, тогда из равенства мер дуг следуют равенства  $\angle AUB = \angle CVD, \angle AUM = \angle CVN$  и подобие (с сохранением ориентации)  $\triangle AUM \sim \triangle CVN$ . Тогда  $MU/NV$  не зависит от выбора окружностей и можно положить  $\overline{MU} = \lambda \vec{u}, \overline{NV} = \lambda \vec{v}$  для фиксированных векторов  $\vec{u}(u_1, u_2)$  и  $\vec{v}(v_1, v_2)$ . Составим уравнение  $f = 0$  первой окружности, где  $f = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$ . Ее центр  $(x_0, y_0)$  – точка  $U\left(\lambda u_1 + \frac{a_1 + b_1}{2}, \lambda u_2 + \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$ , а квадрат радиуса равен  $r^2 = UM^2 + MA^2 =$

$$= \lambda^2 (u_1^2 + u_2^2) + \left(\frac{a_1 - b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2 - b_2}{2}\right)^2.$$

Проделав преобразования, имеем

$$f = \lambda (A_1 x + B_1 y + C_1) + (x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1)$$

для некоторых констант  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$  (слагаемые с  $\lambda^2$  уничтожились). Аналогично, вторая окружность имеет уравнение  $g = 0$ , где

$$g = \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2) + (x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2).$$

Линейному уравнению  $f - g = 0$  удовлетворяют общие точки окружностей, значит, оно и будет задавать прямую  $PQ$ . Имеем

$$f - g = \lambda (Ax + By + C) + (Dx + Ey + F)$$

(для некоторых констант  $A, B, C, D, E, F$ ). В том случае, если пары  $(A, B)$  и  $(D, E)$  не пропорциональны, вне зависимости от  $\lambda$  прямая  $PQ$  проходит через точку пересечения прямых  $Ax + By + C = 0$  и  $Dx + Ey + F = 0$ . Если же пары  $(A, B)$  и  $(D, E)$  пропорциональны, все прямые вида  $\lambda (Ax + By + C) + (Dx + Ey + F) = 0$  параллельны.

Приведем геометрическое описание общей точки  $T$  прямых  $PQ$  (в том случае, когда она существует). Точка  $T$  такова, что треугольники  $TAC$  и  $TDB$  подобны (с указанным соответствием вершин) и противоположно ориентированы. (Построить такую

точку  $T$  и доказать ее единственность можно разными методами.) Достаточно убедиться, что указанная точка  $T$  имеет равные степени (произведения отрезков секущих) относительно нашей пары окружностей  $ABPQ$  и  $CDPQ$ .

Пусть  $S$  и  $R$  – вторые точки пересечения  $TB$  и  $TC$  с этими окружностями (рис. 3). Тогда из равенства дуг следует  $\angle TSA = \angle TRD$ , а из подобия  $\triangle TAC \sim \triangle TDB$  получаем  $\angle STA = \angle TRD$ . Значит, тре-

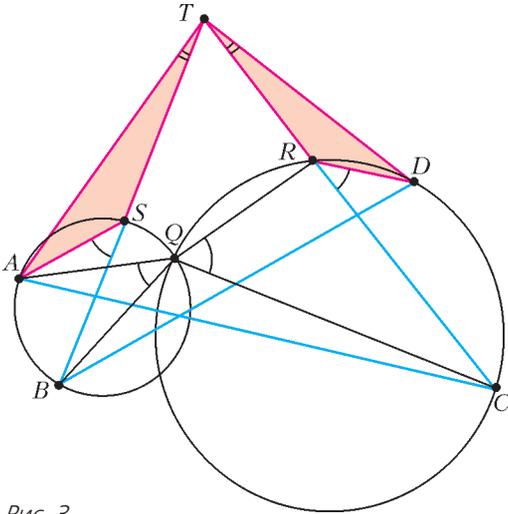


Рис. 3

угольники  $TSA$  и  $TRD$  подобны, следовательно,  $TS/TR = TA/TD = TC/TB$ , откуда  $TB \cdot TS = TC \cdot TR$ , что и требовалось.

С.Берлов, Ф.Петров

**Ф2501.** См. статью А.Власова «Резонансный удар».

**Ф2502.** С одним моле́м одноатомного газа провели процесс, состоящий из четырех участков. На участке 1–2 газ совершил работу  $A$ , при этом температура была пропорциональной объему в степени  $n$ . Температуры  $T_1$  и  $T_2$  известны, причем  $T_1 < T_2$ . На участке 2–3 газ изотермически расширялся, на участке 3–4 он адиабатически расширялся, а на участке 4–1 – изотермически сжимался. Какова работа, совершенная газом на участке 3–4?

Поскольку температура и объем на участке 1–2 связаны степенной зависимостью,

то это процесс с постоянной теплоемкостью – политропический процесс. Для политропического процесса с теплоемкостью  $C$  выполняется соотношение

$$pV^{(C-C_p)/(C-C_v)} = \text{const}.$$

Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона,

$$pV \sim T,$$

или, поскольку по условию  $T \sim V^n$ ,

$$p \sim V^{n-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{C - C_p}{C - C_v} = 1 - n.$$

Отсюда находим теплоемкость процесса на участке 1–2:

$$C_{12} = \frac{C_p + C_v(n-1)}{n}.$$

Количество теплоты, полученное газом на участке 1–2, равно

$$Q_{12} = C_{12}(T_2 - T_1) = \Delta U_{12} + A.$$

Работа газа на участке адиабатического расширения 3–4 равна изменению (убыли) внутренней энергии газа  $U_2 - U_1$ , т.е.  $\Delta U_{12}$ . Отсюда находим эту работу:

$$\begin{aligned} A_{34} &= \Delta U_{12} = Q_{12} - A = \\ &= \frac{(C_p + C_v(n-1))(T_2 - T_1)}{n} - A = \\ &= \frac{R(1 + 3n/2)(T_2 - T_1)}{n} - A. \end{aligned}$$

К.Парфёнов

**Ф2503.** Однократно ионизованный атом гелия (ион) пересекает ось симметрии длинного,  $L = 100$  м, цилиндрического, с площадью поперечного сечения  $S = 100$  см<sup>2</sup>, магнита на расстоянии  $l = 100$  см от его южного полюса (вне магнита). В этот момент скорость иона была направлена перпендикулярно оси симметрии магнита, а ускорение составляло угол  $100^\circ$  с вектором индукции магнитного поля. Какой была скорость иона в этот момент? Какова длина волны де Бройля, соответствующая этой скорос-

ти иона? Модуль заряда электрона равен  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Магнитный дипольный момент электрона, связанный с наличием у него собственного момента количества движения (спина), равен  $\mu_e = 928 \cdot 10^{-26}$  Дж/Тл.

По условию выполняется такая цепочка неравенств:

$$L \gg l \gg \sqrt{S}.$$

Поэтому магнитное поле в том месте, где ион пересекает ось симметрии магнита, направлено к южному полюсу и зависит от расстояния  $x$  от ближайшего магнитного полюса магнита по закону  $B_x = B_0 l^2 / x^2$  – магнитное поле неоднородно.<sup>1</sup> Поскольку угол между ускорением и направлением вектора индукции равен  $100^\circ$ , из этого следует, что ион отталкивается от магнита, т.е. спин иона, обусловленный тем, что у него всего один электрон находится возле ядра, смотрит в направлении вектора индукции, а связанный с ним магнитный момент направлен в противоположную сторону. Потенциальная энергия взаимодействия магнитного диполя с магнитным полем равна

$$U = -(B\mu_e),$$

а величина силы взаимодействия равна

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

В нашем случае эта сила равна по величине

$$F = 2 \frac{\mu_e B_0}{l}.$$

По условию задачи ускорение частицы направлено под углом  $\alpha = 100^\circ$  к вектору индукции магнитного поля. Это означает, что магнитная составляющая силы Лоренца (она единственная, поскольку в том месте, где находится ион, нет электрического поля) имеет величину

$$evB_0 = |F \operatorname{tg} \alpha| = \frac{2\mu_e B_0 |\operatorname{tg} \alpha|}{l}.$$

Отсюда получаем

$$v = \frac{2\mu_e |\operatorname{tg} \alpha|}{el} = 0,658 \text{ мм/с}.$$

Этой скорости соответствует длина волны де Бройля, равная

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{m_{\text{He}} v} = \\ &= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot 0,658 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}} \approx \\ &\approx 0,15 \text{ мм}. \end{aligned}$$

С.Варламов

**Ф2504.** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 100$  нФ и катушки индуктивностью  $L = 100$  мкГн. Емкость конденсатора периодически изменяют с амплитудой  $\Delta C = C/100$  и с периодом вдвое меньшим, чем период собственных колебаний контура. Оцените максимальное время, за которое амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе на собственной частоте достигнет 100 мВ. Считайте, что тепловые колебания в контуре имеют характерную тепловую энергию  $kT$ . Температура равна 100 К. Омическое сопротивление проводов катушки равно нулю.

В рассматриваемом случае периодическое изменение параметра контура, а именно емкости конденсатора, внешними силами приводит к росту запаса энергии колебаний в этом контуре. Если фаза колебаний и фаза изменения параметра подобраны правильно, а при хаотическом тепловом движении всегда найдется промежуток времени, когда такое удачное соотношение выполняется, то внешние силы увеличивают расстояние между пластинами как раз в те промежутки времени, когда эти пластины притягиваются. Если считать, что вся энергия колебаний в контуре в такой момент времени сосредоточена в конденсаторе, то уменьшение емкости на 1% приводит к увеличению энергии примерно на 1%. Таким образом, за каждую половину периода колебаний в контуре его энергия увеличивается в 1,01 раза. Энергия, соответствующая тепловому движению, равна

<sup>1</sup> Более подробно об этом рассказывается в статье С.Варламова «В защиту магнитных зарядов и магнитных диполей». (Прим. ред.)

$kT = 1,6 \cdot 10^{-21}$  Дж. Энергия, соответствующая амплитуде напряжения на конденсаторе  $U = 100$  мВ, равна  $CU^2/2 = 5 \cdot 10^{-10}$  Дж. Половина периода собственных колебаний в контуре составляет  $\tau/2 = \pi\sqrt{CL} \approx 10^{-7}$  с. Нужно подобрать такое значение числа  $N$ , при котором

$$kT \cdot (1,01)^N = \frac{CU^2}{2}.$$

### Резонансный удар

А.Власов

Эта статья посвящена решению задачи Ф2501 из «Задачника «Кванта». Вот ее условие:

*Механическая модель молекулы состоит из двух шариков, скрепленных невесомой пружинкой. Такая модель-молекула движется к жесткой стенке так, как это показано на рисунке 1 (прямая линия,*

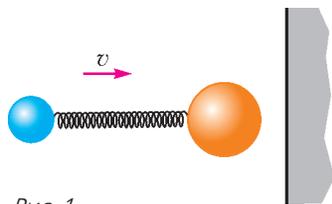


Рис. 1

*проходящая через центры шариков, перпендикулярна плоскости стенки). Шарик движется с одинаковыми скоростями, пружинка не деформирована. При каком соотношении масс атомов-шариков удар молекулы о стенку будет резонансным? При таком ударе энергия колебаний молекулы после «ухода» от стенки должна быть максимальной. Удар шарика о стенку считайте абсолютно упругим.*

Обозначим массы шариков через  $M$  и  $m$ ; о стенку ударяется шарик массой  $M$ . Если выполняется неравенство  $M > m$ , то в результате удара первого атома-шарика центр масс системы «уходит» от стенки и в молекуле – двойном пружинном маятнике – возникают колебания. После удара скорость центра масс направлена от стенки и равна

$$v_0 = v \frac{M - m}{M + m} = v \frac{\mu - 1}{\mu + 1},$$

Следовательно,

$$N = \frac{\ln(CU^2/(2kT))}{\ln(1,01)} = 2416.$$

Отсюда получаем время раскочки колебаний до требуемой амплитуды:

$$t = N \frac{\tau}{2} \approx 0,24 \text{ мс.}$$

С.Варламов

где  $\mu = \frac{M}{m}$  – величина, которую нужно найти. Период и частота колебаний равны

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{(M+m)k}{Mm}},$$

где  $k$  – жесткость пружинки.

Перейдем в систему отсчета центра масс. Скорость первого атома-шарика сразу после удара о стенку в этой системе отсчета равна

$$u_1 = 2v \frac{m}{m + M} = 2v \frac{1}{1 + \mu},$$

амплитуда его колебаний равна

$$A_1 = \frac{u_1}{\omega} = \frac{2v}{1 + \mu} \frac{T}{2\pi}.$$

Вернемся в систему отсчета, в которой стенка покоится. Координата  $x$  той точки  $K$  первого шарика, которой он стукнулся о стенку, после удара зависит от времени так:

$$x(t) = v \frac{\mu - 1}{\mu + 1} t + \frac{2v}{1 + \mu} \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

Если амплитуда колебаний шарика велика, то произойдет еще один удар, и в этом случае энергия движения молекулы как целого увеличится, а это означает, что уменьшится энергия колебаний. Следовательно, нужно подобрать такое соотношение масс шариков, чтобы второго удара не было и амплитуда колебаний первого шарика была максимально возможной. График движения, удовлетворяющий этим условиям (и заодно максимуму энергии колебаний молекулы после удара), показан на рисунке 2.

Первый шарик после «разворота» коле-

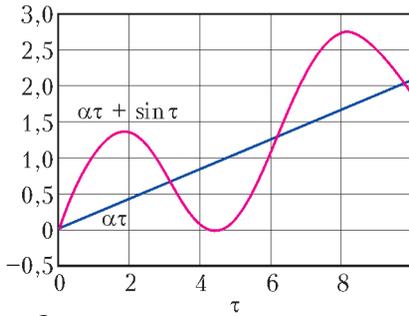


Рис. 2

баний касается стенки без удара – его скорость в момент касания равна скорости «ухода» центра масс от стенки. Для этого момента времени (касания) координата точки  $K$  равна нулю и скорость этой точки тоже равна нулю. После деления соответствующих выражений на одинаковый множитель  $\frac{v}{\mu + 1}$  получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (\mu - 1)t + \frac{T}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 0, \\ (\mu - 1) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Эту систему удобнее переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha(\mu)\tau = -\sin\tau, \\ \alpha(\mu) = -\cos\tau, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\alpha = \frac{\mu - 1}{2}$ ,  $\tau = \frac{2\pi}{T}t$ .

Для преобразованной системы (2) инвариантно преобразуется картинка графического решения системы (рис.3). График движения центра масс касается графика колебаний. Приближенное решение очевидно. Точка касания графиков близка к

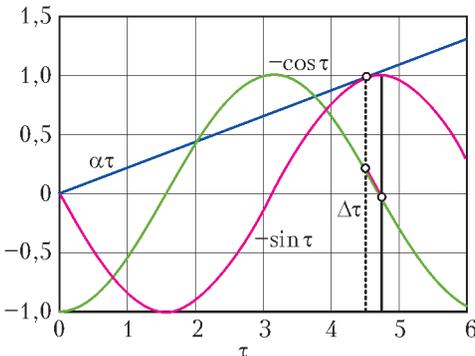


Рис. 3

$\tau = \frac{3}{2}\pi$ . Используя это значение как нулевое приближение, из первого уравнения системы получаем

$$\alpha \cdot \frac{3}{2}\pi = 1, \text{ или } \alpha = \frac{2}{3\pi}.$$

Отсюда

$$\mu = 1 + 2\alpha = 1 + \frac{4}{3\pi} \approx 1,42.$$

Можно показать, что система уравнений (2) решается только численно. Действительно, освободившись от  $\alpha$ , приходим к трансцендентному уравнению

$$\text{tg}\tau = \tau.$$

Это уравнение несложно решить на простом калькуляторе методом итераций. Для этого уравнение удобнее представить в виде

$$\tau = \text{arctg}\tau.$$

Решение «сходится» очень быстро. Это иллюстрирует таблица и итерационный график на рисунке 4.

$N$	$\tau$	$N$	$\tau$
1	4,0	5	4,49340671
2	4,4674	6	4,49340933
3	4,4922	7	4,49340945
4	4,4934		

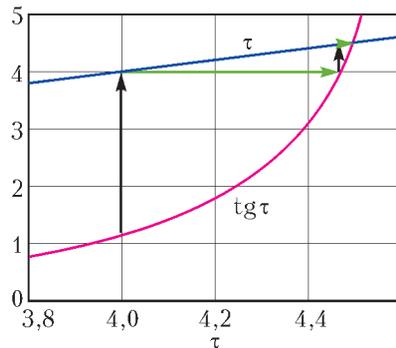


Рис. 4

При начальном значении  $\tau = 4$  решение (с точностью до четырех знаков после запятой) сходится за три шага к величине  $\tau = 4,4934$ . Используя это значение, из второго уравнения системы (1) получаем  $\mu = 1 - 2 \cos \tau = 1 - 2 \cos 4,4934 \approx 1,43447$ .

Можно обойтись без итерационного (численного) решения, а результат получить в приближении первого порядка. Для этого во втором уравнении системы (2) используем значение косинуса в первом приближении (см. рис.2):  $\alpha = \Delta t$ . Это значение подставляем в первое уравнение системы (2), в котором значение синуса тоже берется в первом приближении:

$$\alpha \left( \frac{3}{2} \pi - \alpha \right) = 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

После преобразования получаем квадратное уравнение

$$\alpha^2 - 3\pi\alpha + 2 = 0.$$

Его решение:

$$\alpha = \frac{3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 8}}{2} = 0,217212688 = \frac{\mu - 1}{2}.$$

Отсюда

$$\mu = 1,434425 \approx 1,434.$$

Численное решение и решение в первом

приближении (с точностью трех знаков после запятой) совпадают.

*Дополнение.* Расчет на компьютере отношения энергии колебаний после удара к первоначальной энергии молекулы  $\varepsilon$  от отношения масс шариков  $\mu$  дает зависимость, показанную на рисунке 5. Имеется

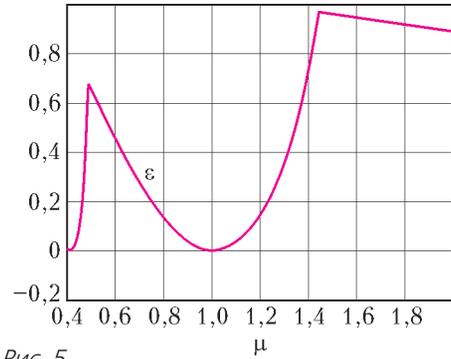


Рис. 5

локальный максимум в области отношения масс  $\mu < 1$ , но он меньше глобального максимума в точке  $\mu \approx 1,434$ .

## В защиту магнитных зарядов и магнитных диполей

*С.Варламов*

До открытия Эрстедом действия электрического тока на магнитную стрелку взаимодействие магнитов объясняли и описывали с помощью представления о существовании магнитных полюсов северного и южного свойства. Противоположные полюса притягиваются друг к другу, а полюса одного сорта отталкиваются друг от друга. Именно для этого взаимодействия полюсов магнитов исторически первым был установлен соответствующий закон – закон обратных квадратов, а уже затем такой же закон (закон Кулона) был установлен и для взаимодействия электрических зарядов.

Однако такой способ описания взаимодействия магнитов – с магнитными зарядами – широко не применяется. Связано это с тем, что в природе не существуют (не обнаружены экспериментально до сих пор) магнитные монополи. Тем не менее, в некоторых случаях для вычислений маг-

нитных полей, сил взаимодействия магнитов или моментов этих сил весьма удобно пользоваться магнитными зарядами.

Обсудим способы нахождения магнитных дипольных зарядов, соответствующих длинным магнитам-соленоидам, и рассмотрим достоинства методов расчета, основанных на использовании магнитных зарядов в магнитостатике. При этом оказывается, что результаты расчетов, т.е. найденные силы и моменты сил, действующие на длинные магниты-соленоиды в электромагнитном поле, в точности совпадают с результатами расчетов, проводимых без использования представления о магнитных зарядах, а выполненных стандартными (принятыми) методами. Это означает, что способы описания эквивалентны. В некоторых случаях решение с использованием представления о магнитных зарядах является простым и наглядным, а другие способы решения выглядят громоздкими или очень сложными.

Поскольку суммарный поток вектора индукции магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю, то

статическое магнитное поле, созданное зарядами, движущимися *внутри* этой поверхности, *вне* этой поверхности всегда можно представить в виде суперпозиции полей, созданных несколькими парами магнитных зарядов.

### Магнитный диполь в однородном магнитном поле

Пусть в однородном магнитном поле находится плоский замкнутый сам на себя виток из тонкой проволоки, по которой пропущен электрический ток  $I$  (маленькая батарейка обеспечивает протекание тока в проволоке). Линии однородного магнитного поля  $\vec{B}$  составляют угол  $\alpha$  с перпендикуляром к плоскости витка. На каждый небольшой участок проволоки с током действует сила Ампера. Правило для нахождения ее величины и направления известно. Легко показать, что на такой виток со стороны однородного магнитного поля действует суммарная нулевая сила, но не равный нулю механический момент сил. Величина этого момента сил пропорциональна произведению тока в проволоке  $I$ , индукции магнитного поля  $B$ , площади участка плоской поверхности  $S$ , который ограничен контуром, совпадающим с местом расположения проволоки, и синуса угла  $\alpha$ :

$$M = ISB \sin \alpha .$$

Представим вектор индукции магнитного поля в виде  $\vec{B} = \vec{H}\mu_0$ , где  $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля,  $\mu_0$  – магнитная постоянная. Направление действия момента сил определяется по правилам векторного произведения двух векторов:  $\vec{P}^*$  и  $\vec{H}$ . Здесь  $\vec{P}^*$  – это вектор, пропорциональный дипольному моменту  $\vec{P} = SI\vec{n}$ , т.е.  $\vec{P}^* = \mu_0\vec{P}$  (единичный вектор  $\vec{n}$  определяет направление дипольного магнитного момента витка с током). Определенный так вектор  $\vec{P}^*$ , равный по величине  $\mu_0SI$ , мы будем в дальнейшем называть *нашим* дипольным моментом или *переопределенным* дипольным моментом.

Поясним, для чего введен этот, казалось бы, неправильный и, соответственно, ненужный термин. Дело в том, что при

одинаковых названиях величин хочется получить и одинаковые формулы для описания взаимодействия электрических зарядов с электрическим полем и магнитных зарядов с магнитным полем. А для большей симметрии в описании хочется (автору), чтобы сила была равна произведению заряда на напряженность поля в обоих случаях, чтобы потенциальная энергия маленького по размерам диполя в поле была бы равна взятому со знаком минус скалярному произведению дипольного момента на вектор напряженности поля, чтобы заряды определялись одинаково через поток векторов индукции полей.

Итак, вектор  $\vec{P}^*$  выбирается таким, чтобы правильно описывать силовое взаимодействие, а именно, этот вектор должен быть перпендикулярен плоскости витка с током, а направление вектора определяется по правилу правого винта (штопора). Если считать, что в проводе витка движутся положительные носители заряда и с их движением связан ток в проводнике, то направление дипольного момента совпадает с направлением, в котором вкручивается (правый) штопор при движении концов ручки штопора в таком же направлении, куда движутся положительные носители заряда.

Если таких витков много,  $N$ , и они образуют длинный соленоид длиной  $l$ , то суммарный момент сил складывается из  $N$  одинаковых моментов, действующих на каждый из витков. Можно величину магнитного дипольного момента такого соленоида представить в виде  $l(N\mu_0SI/l)$ , где  $l$  – длина диполя, а  $N\mu_0SI/l$  – величины магнитных зарядов с противоположными свойствами, расположенные на концах магнитного диполя (соленоида). Тогда величина суммарного момента сил выражается так:  $[\vec{l}N\mu_0SI/l \times \vec{H}]$ , где  $\vec{l}$  – это направленный отрезок, начинающийся на южном конце магнита и заканчивающийся на северном конце и представляющий длину и направление диполя, составленного двумя магнитными зарядами с противоположными свойствами (южным и северным). При этом величина  $N\mu_0SI/l$ , которая равна

потоку вектора индукции магнитного поля через любое сечение внутри соленоида в направлении от его южного полюса к северному, может считаться (называться) магнитным зарядом. Внутри такой комбинации диполей, которая показана на рисунке 1 справа, полюса противоположных

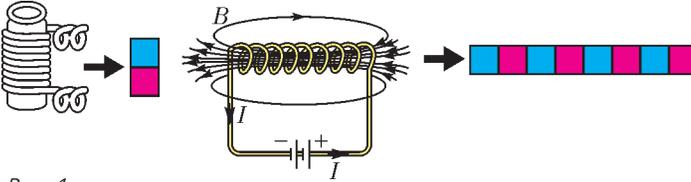


Рис. 1

свойств компенсируют друг друга, а на концах длинного соленоида (магнита) находятся нескомпенсированные полюса.

По аналогии с выражением для момента сил, действующих на неподвижный электрический диполь в однородном электрическом поле:  $\vec{M} = [\vec{P}_э \times \vec{E}]$ , можно и в нашем (магнитном) случае для неподвижного магнитного диполя написать такое же выражение:  $\vec{M} = [\vec{P}_м \times \vec{H}]$ . И в одном и в другом случае названия для характеристик магнитного и электрического поля одинаковые: это напряженности полей. Следовательно, и для электрических зарядов, которые существуют на самом деле, и для магнитных зарядов, введенных описанным выше образом, можно применять одинаковые названия. Иными словами, можно говорить, что на концах электрического диполя находятся электрические заряды и что на концах магнитного диполя (длинного соленоида) находятся магнитные заряды.

Полученное выражение для магнитного заряда:  $N\mu_0 SI/l$  соответствует потоку вектора индукции магнитного поля через сечение  $S$  соленоида длиной  $l$ . Этот поток собирается из окружающего соленоида пространства к южному полюсу магнита (соленоида), проходит внутри магнита (соленоида) от южного полюса к северному и разбегается снова из северного полюса во все стороны.

### Магнитный диполь в неоднородном магнитном поле

Точно так же, как и для описания силового воздействия неоднородного электрического поля на находящийся в поле электрический диполь, можно описывать силовое воздействие неоднородного магнитного поля на магнитный диполь.

Пусть каждая точка пространства характеризуется своим электрическим потенциалом  $U$  и вектором напряженности электрического поля

$$\vec{E} = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right].$$

В этом поле располагается электрический диполь  $\vec{P}_э = Q\vec{l}$ . Если длина диполя очень мала, то потенциальная энергия взаимодействия поля с диполем равна взятому со знаком «минус» скалярному произведению вектора дипольного момента на вектор напряженности электрического поля:

$$W = -(\vec{E}\vec{P}_э).$$

Если теперь перемещать диполь поступательно в разных направлениях, то потенциальная энергия изменяется, т.е. на диполь со стороны поля действует не равная нулю сила

$$\vec{F} = -\left[\frac{\partial W}{\partial x}; \frac{\partial W}{\partial y}; \frac{\partial W}{\partial z}\right].$$

Поскольку взаимодействие магнитных диполей с магнитным полем описывается в точности такими же формулами с теми же названиями входящих в эти формулы величин, то и для силы, которая действует на магнитный диполь (переопределенный)  $\vec{P}_м$  в неоднородном магнитном поле, формулы будут в точности такие же:

$$W = -(\vec{H}\vec{P}_м), \quad \vec{F} = -\left[\frac{\partial W}{\partial x}; \frac{\partial W}{\partial y}; \frac{\partial W}{\partial z}\right].$$

### Как найти магнитное поле вблизи магнита

Магнитные поля по современным представлениям создаются движущимися электрическими зарядами, поэтому постоянные магнитные свойства предметов (постоянных магнитов) проявляются и суще-

ствуют только в виде совокупности *магнитных диполей*, суммарный магнитный заряд которых всегда равен нулю. Хорошим примером магнитного диполя может служить длинный соленоид (его длина во много раз больше диаметра сечения), магнитные заряды которого, если можно так выразиться, соединены своеобразной перемычкой или «пуповиной». Это область или канал, по которому линии индукции магнитного поля, вышедшие из северного магнитного полюса и пришедшие в южный магнитный полюс *снаружи магнита*, возвращаются из южного магнитного полюса в северный магнитный полюс *внутри магнита*. Если эта перемычка (пуповина) тонкая, т.е. длина соленоида во много раз больше его диаметра, то всюду вне этой выделенной области вдали от магнитных зарядов (или полюсов магнита) магнитное поле такое, какое создают два магнитных заряда противоположного свойства – *северный* и *южный*, находящиеся на концах соленоида. И только *внутри* соединяющего эти заряды канала магнитное поле является суперпозицией двух полей – поля бесконечно длинного соленоида и поля, созданного двумя магнитными зарядами, расположенными на полюсах магнита. Эти магнитные заряды размазаны равномерно по площади торцов соленоида (если, конечно, поперечное сечение длинного прямого соленоида одинаково по всей его длине). Для расчетов магнитного поля, созданного соленоидом вдали от его торцов, в первом приближении можно считать магнитные заряды на концах соленоида точечными.

Наиболее сильные отличия реальной картины распределения магнитного поля от картины распределения с точечными зарядами имеют место как раз вблизи полюсов магнита или вблизи торцов соленоида с током. В этих местах нужно честно считать поле, созданное магнитным зарядом, размазанным равномерно по площади торца. При этом сила, действующая на соответствующий магнитный заряд  $q_M$ , находящийся во внешнем однородном магнитном поле с напряженностью  $\vec{H}$ , равна  $q_M \vec{H}$ . Эта формула даже в названиях

входящих в нее величин является полным аналогом соответствующей формулы для силы, действующей на электрический заряд  $q_e$ , находящийся в электрическом поле с напряженностью  $\vec{E}$ . Электрический заряд равен потоку вектора индукции  $\vec{D}$  электрического поля ( $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость) через поверхность, охватывающую этот заряд. И то же самое можно сказать в отношении магнитного заряда, находящегося на торце длинного соленоида. Его величина равна потоку вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , который сначала по пуповине приходит к торцу соленоида, а затем разбегается от этого торца по всем направлениям в пространстве. На приведенной на рисунке 2 фотографии несколько коротких и «силь-

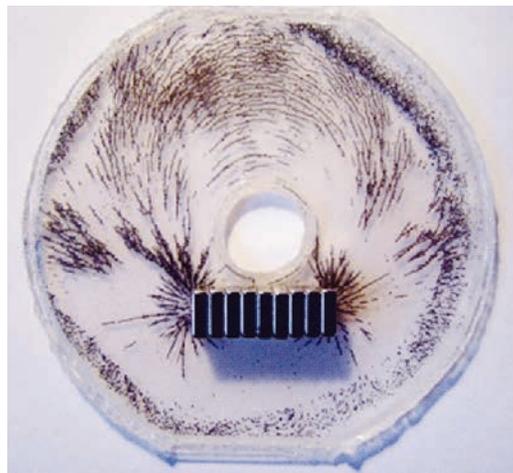


Рис. 2

ных» керамических магнитов соединены в длинный магнит, а мелкие железные шарики возле магнита расположились цепочками, демонстрируя структуру магнитного поля вблизи магнита.

Поскольку в преподавании любого предмета желательно так преподнести новый материал, чтобы он «хорошо ложился» на уже выработанные на предыдущих занятиях представления, то переопределенный магнитный диполь сразу упрощает восприятие и запоминание всех формул, относящихся к магнитному полю. Эти формулы и понятия для магнитного поля

имеют абсолютно такой же вид и такие же названия, как для электрического поля. Это (с точки зрения автора) оправдывает переопределение магнитного диполя. С другой стороны, какая разница, каким символом обозначать тот или иной параметр, если в сопровождающем тексте имеется его определение. Например, если в задаче про нахождение ускорения бруска при начале его скольжения по наклонной

плоскости с трением обозначить массу бруска символом  $g$ , ускорение свободного падения символом  $\mu$ , коэффициент трения символом  $\alpha$ , а угол наклона плоскости к горизонту символом  $m$ , то для найденного ускорения получится необычная по виду формула (читателям предлагается вывести ее самостоятельно и улыбнуться). Но суть дела от этой замены символов никак не меняется!

## КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

*Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».*

*Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com) или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.*

*Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте [sites.google.com/view/savin-contest](http://sites.google.com/view/savin-contest)*

*Желаем успеха!*

**29.** В Шиловске шило стоит на 1% дешевле, чем в Мыловске, а мыло — на 1% дороже. Проезд из одного города в другой стоит 1000 рублей. У юного бизнесмена, живущего в Шиловске, есть 100 тысяч рублей и он мечтает разбогатеть, «меняя шило на мыло». Сбудутся ли его мечты?

*А.Заславский*

**30.** Гравировщик шлифует алмаз, имеющий форму выпуклого многогранника, превращая его постепенно в бриллиант. Начинает он с того, что сначала срезает все уголки алмаза-многогранника (маленькие пирамидки при вершинах) остро отточенным плоским ножом. Докажите, что после этой операции число всех вершин у полученного многогранника будет четным, а число ребер будет делиться на 3.

*Г.Гальперин*

**31.** Дана клетчатая доска, все клетки которой изначально имеют черный цвет. Одной операцией разрешается выбрать на доске любую фигуру из 5 клеток, изображенную на рисунке 1 (фигурку можно

поворачивать), и изменить цвет каждой из клеток этой фигурки на противоположный (черный — на белый и наоборот). Можно ли за несколько таких операций переокрасить всю доску в белый цвет, если:

- а) доска имеет размеры  $7 \times 7$ ;
- б) доска имеет размеры  $8 \times 8$ ?

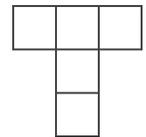


Рис. 1

*С.Костин*

**32.** Разрежьте фигуру на рисунке 2 на две одинаковые части.

*В.Расторгуев*

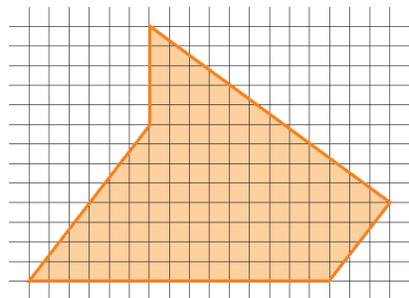


Рис. 2

## Задачи

1. Найдите закономерность и вставьте пропущенную цифру.

*В.Расторгуев*



2. В разноцветной семейке было поровну белых, синих и полосатых детей-осьминожков. Когда несколько



синих осьминожков стали полосатыми, папа решил посчитать детей. Синих и белых вместе взятых оказалось 10, зато белых и полосатых вместе взятых — 18. Сколько детей в разноцветной семейке?

*И.Раскина*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

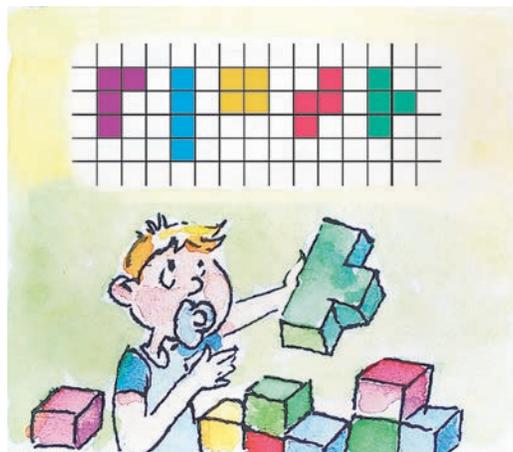
Задачи 2–4 предлагались на XXIX Математическом празднике.



3. Используя каждую из цифр от 0 до 9 ровно по разу, запишите 5 ненулевых чисел так, чтобы каждое делилось на предыдущее.

*А.Шаповалов*

4. Фигурки из четырех клеток называются тетрамино. Они бывают пяти видов (как на рисунке). Существует ли



такая фигура, что при любом выборе вида тетрамино эту фигуру можно составить, используя тетраминошки только выбранного вида? (Переворачивать тетраминошки можно.)

*Ю.Маркелов (ученик 8 класса)*

# Почему Луна не падает на Землю

С.ДВОРЯНИНОВ

— Я ВИЖУ, ТЫ О ЧЕМ-ТО ГЛУБОКО задумался, — сказал Папа Карло, обращаясь к Буратино. Папа Карло отряхнул стружки с фартука, отошел от верстака и склонился над столом, за которым Буратино делал уроки.

— Ты ничего не пишешь. Что так занимает твои мысли?

— Да вот никак не могу осознать, почему это Луна на Землю не падает. Висит она наверху, как яблоко, а вниз не падает, — ответил Буратино.

— Так, вопрос интересный. А не удивляет ли тебя, что Луна от Земли куда не улетает?

— А почему это она должна улетать? — оживился Буратино. Сколько живу, ничего подобного не видел, ничто от Земли никогда не улетает. А падает все, что ни возьми: учебник со стола, яблоко с яблони, черепица с крыши. Камень, брошенный в море, опускается на дно. Даже легкая

пыль, поднятая повозкой, и та со временем осаждается на дороге. Чтоб от Земли улечь — это надо постоянно крыльями махать. А в космосе воздуха нет, там и махать бесполезно — не от чего оттолкнуться. Так что с моим вопросом твой вопрос никак не связан.

— Что ж, давай рассуждать. Луна вращается вокруг Земли. Так?

— Конечно. Есть полная луна, есть ночи безлунные, это все из-за вращения Луны вокруг Земли.

— А что известно о параметрах траектории Луны?

— Один оборот Луна совершает примерно за 28 суток, радиус лунной орбиты около 380000 км, и, следовательно, Луна движется по своей орбите с линейной скоростью, — Буратино взял в руки карандаш, — вот:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 38 \cdot 10^7 \text{ м}}{28 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с}} \approx \approx 0,99 \cdot 10^3 \text{ м/с} \approx 10^3 \text{ м/с}$$

— примерно 1 километр в секунду.

— А теперь давай построим модель движения по окружности, — предложил Папа Карло. Он взял кусок фанеры, в центре его сделал отверстие, в которое снизу поместил гвоздь. На него он накинул легкое проволочное кольцо и привязал к нему тонкую нить, конец которой пропустил через небольшой деревянный шарик, изготовленный им для этажерки. Щелчок — и шарик закрутился вокруг гвоздя по окружности, удерживаемый силой натяжения нити.

— А что произойдет, если нить внезапно порвется, как будет двигаться шарик дальше? — задал вопрос Папа Карло.

— Ну, шарик покатится по инерции, а нить, как хвост, потянется за ним... — начал Буратино.

— Покатится — да, но как и куда? Конечно, тут можно подумать, но мы проведем



эксперимент. Принеси-ка из песочницы во дворе немного песка, – попросил Папа Карло.

Через минуту песок был тут как тут, и Папа Карло тонким слоем нанес его на фанеру. Теперь от движущегося шарика на песке оставался тонкий круговой след. Папа Карло еще раз закрутил шарик и затем вынул гвоздь. Освобожденный шарик покатился по фанерному листу, оставляя за собой на песке прямолинейный след.

– Присмотрись, как след от шарика связан с окружностью, – предложил Папа Карло. – Этот прямолинейный след – часть касательной к окружности. Если тело движется по окружности, то его скорость всегда направлена по касательной к этой окружности. Можно сказать, что тело хочет улечься по направлению касательной или вдоль касательной.

Скорость шарика на нити постоянно меняет свое направление. Так же меняет свое направление и скорость Луны. Ускорение Луны направлено к центру Земли (его называют центростремительным ускорением) и равно

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2}{38 \cdot 10^7 \text{ м}} \approx 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}/\text{с}^2.$$

Это ускорение создает сила взаимного тяготения Земли и Луны, равная

$$F = G \frac{M_3 M_{\text{Л}}}{R^2},$$

и его можно рассчитать так:

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{M_{\text{Л}}} = G \frac{M_3}{R^2} = \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24}}{(38 \cdot 10^7)^2} \text{ м}/\text{с}^2 \approx \\ &\approx 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}/\text{с}^2. \end{aligned}$$

Разумеется, оба значения ускорения близки друг другу.

Замечательно и удивительно следующее. Для нашего шарика мы видим материальный объект, создающий силу, притягивающую шарик к центру вращения, – это нить. Она деформируется, растягивается, возникает сила натяжения. Только деформация мала, не так очевидна, как,

скажем, в случае пружины. Но сила есть. А вот какая сила удерживает Луну на ее круговой орбите вокруг Земли? У нас нет никакого опыта, который мог бы продемонстрировать и объяснить это явление.

– Ты задумался о том, – продолжал Папа Карло, – почему Луна не падает на Землю. И тебя это удивляет. В действительности же она постоянно падает на Землю. Пожалуй, не менее удивительно то, что Луна не улетает от Земли. А не улетает она именно из-за притяжения к нашей планете.

В заключение заметим, что обычно говорят о вращении Луны вокруг Земли. Это не совсем точно. Прделаем такой опыт. На оси длиной  $L$  разместим два одинаковых колеса, которые могут свободно на ней вращаться. Поместим нашу модель на пол и закрутим в горизонтальной плоскости. Мы увидим, что оба колеса катятся по одной и той же окружности радиусом  $L/2$ . Оба колеса вращаются вокруг их общего центра масс. Так же вращаются и два небесных тела с равными массами.

Пусть теперь колеса имеют разные массы – например, вблизи одного колеса на



оси закреплен дополнительный груз. В этом случае колеса катятся по разным окружностям. Тяжелое колесо – по малой окружности, легкое колесо – по большой. Радиусы этих окружностей обратно пропорциональны массам колес. Если одно колесо сделать очень тяжелым, то оно вращаться практически не будет и его траектория на полу превратится в точку. Нам будет казаться, что легкое колесо вращается вокруг тяжелого.

Так вот, масса Земли намного превосходит массу Луны, поэтому и говорят, что Луна вращается вокруг Земли.

# Будут ли на Марсе яблони ЦВЕСТИ

Ю. БРУК, А. СТАСЕНКО

*Герои и смельчаки проложат первые...  
тропы трасс: Земля – орбита Луны, Земля – орбита Марса...*

К.Э. Циолковский

**В**СЕМ ХОРОША ПЛАНЕТА МАРС: И СУТКИ почти земные, и наклон оси вращения к эклиптике почти земной, и вес тела колониста необременителен – даже наоборот. Действительно, ускорение тяготения на Марсе

$$g_M = \frac{Gm_M}{r_M^2} = g_3 \frac{m_M}{m_3} \left( \frac{r_3}{r_M} \right)^2 =$$

$$= 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot \left( \frac{6,4 \cdot 10^{23} \text{ кг}}{6,0 \cdot 10^{24} \text{ кг}} \right) \left( \frac{6400 \text{ км}}{3400 \text{ км}} \right)^2 \approx$$

$$\approx 3,7 \text{ м/с}^2 < g_3 = 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Понятно, что тут использованы табличные данные для массы и радиуса планет (индекс: З – Земля, М – Марс).

Но не все так хорошо. Мало того что атмосфера Марса в сотню раз более разрежена и не содержит кислорода – так еще и плотность потока солнечной энергии  $q$  маловата:

$$q_M = q_3 \left( \frac{R_3}{R_M} \right)^2 = 1400 \text{ Вт/м}^2 \cdot \left( \frac{1}{1,5} \right)^2 \approx$$

$$\approx 600 \text{ Вт/м}^2.$$

Тут подставлено значение  $q_3$  на орбите Земли и учтено, что Марс находится в полтора раза дальше от Солнца. Правда, днем температура поверхности Марса на экваторе поднимается до  $+30^\circ\text{C}$ , но на теневой стороне опускается ниже  $-48^\circ\text{C}$ , что несколько дискомфортно.

Но не таков был один вдумчивый Студент, чтобы не решить (хотя бы) эту проблему. Зеркало! Да, нужно где-то в окрестности Марса расположить зеркало, которое отра-

жало бы «скудные лучи Солнца» и фокусировало их на задней поверхности планеты. И возникла схема, изображенная на рисунке. Понятно, что зеркало должно быть вогнутым (приблизительно сферическим), и если оно помещено на высоте  $h$  над освещаемой площадкой, то его радиус кривизны не должен равняться  $2h$ , чтобы лучи не собрались в одну точку на освещаемой поверхности. Но где его расположить? Конечно, проще всего сделать так, чтобы оно неподвижно висело над заданной точкой поверхности планеты. Иными словами, это должен быть *ареостационарный* спутник (тут употреблена аналогия с геостационарным спутником в окрестности Земли, а для случая Марса в целях благозвучия использован его латинский аналог – Арес). Радиус его орбиты  $r_c$  легко найти, приравняв ускорение тяготения центростремительному ускорению:

$$\frac{Gm_M}{r_c^2} = \frac{v^2}{r_c}, \quad v = \frac{2\pi r_c}{\tau},$$

где  $v$  – орбитальная скорость зеркала,  $\tau$  – марсианские сутки. Отсюда

$$r_c = \left( \frac{Gm_M}{(2\pi/\tau)^2} \right)^{1/3} = 20 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Напомним, что для Земли эта величина приблизительно вдвое больше.

Очевидно, что площадь орбитального зеркала должна зависеть от заданных значений площади освещаемой поверхности и плотности потока энергии падающего на нее излучения. Предположим, что в условиях наибольшей освещенности (при  $\theta = 0$ ) необходимо достичь «земной» плотности потока излучения  $q_3 = 1400 \text{ Вт/м}^2$  на площадке марсианской поверхности  $s = 1 \text{ га}$ . Тогда идеально отражающее зеркало должно собрать энергию в  $\left( \frac{r_M}{r_3} \right)^2 = 1,5^2$  раз большую, т.е. иметь площадь  $S$  не менее  $2,3 \text{ га}$ .

Далее, фокусное расстояние зеркала можно найти из подобных треугольников с общим центром  $O$ :

$$\frac{F-h}{F} = \sqrt{\frac{s}{S}}, \quad h = r_c - r_M,$$

$$F = \frac{h}{1 - \sqrt{\frac{s}{S}}} = \frac{(20 - 3,4) \cdot 10^6}{1 - \frac{1}{1,5}} \text{ м} = 50 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

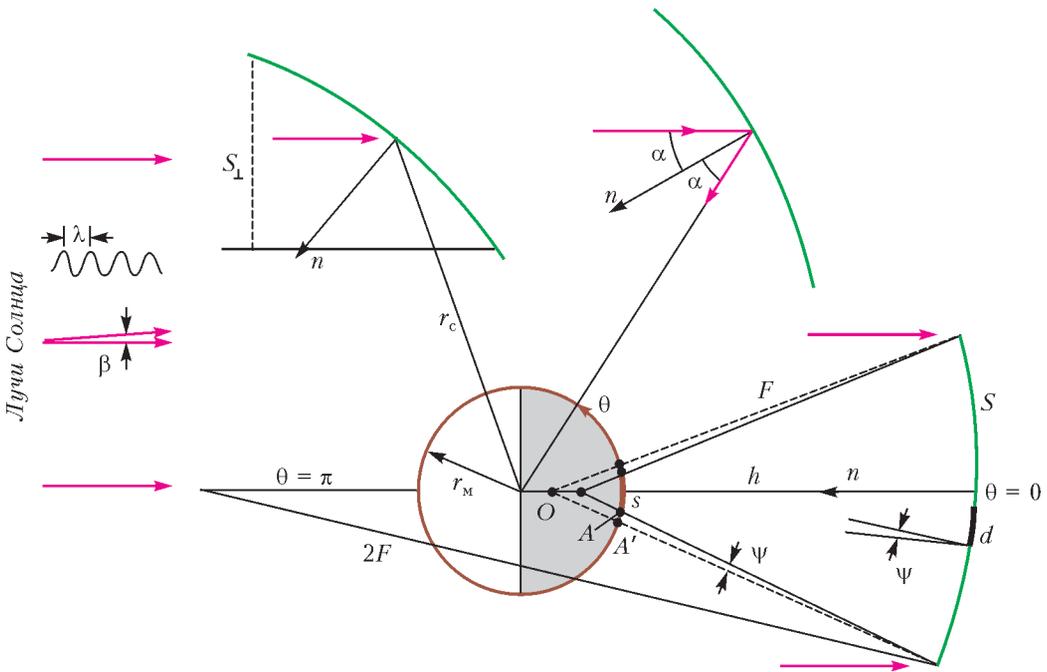


Схема движения зеркала по круговой орбите:  $r_c$  – радиус орбиты спутника,  $h$  – высота зеркала над поверхностью планеты радиусом  $r_M$ ,  $\alpha$  – угол падения солнечных лучей,  $\beta$  – угол их расхождения,  $F$  и  $S$  – фокусное расстояние и площадь поверхности участка зеркала,  $2F$  – его радиус кривизны,  $s$  – площадь освещаемого участка на поверхности планеты

Следовательно, найден еще один конструктивный параметр зеркала – его радиус кривизны  $2F = 10^8$  м. Заметим, что на рисунке масштаб не соблюден. Желаящие да построят более правильный чертеж.

Возможно, с технической точки зрения площадь этого зеркала разумно составить из плоских фрагментов с характерным размером  $d$ . И тут возникает необходимость оценить влияние еще одного физического явления – дифракцию световой волны.

Как известно, волна длиной  $\lambda$ , проходя через отверстие диаметром  $d$  или отражаясь от диска такого же диаметра, рассеивается на угол  $\psi \sim \frac{\lambda}{d}$ . Значит, луч, отраженный от края плоского участка размером  $d$ , придет не в точку  $A$ , а в точку  $A'$  на поверхности планеты. Собранный зеркалом энергия при этом придется на несколько большую площадь, и, следовательно, плотность потока энергии уменьшится. Эта добавка к радиусу освещенного пятна составит величину порядка  $\Delta r = \frac{\lambda}{d} h$ . Принимая среднюю длину волны солнечного света  $\lambda = 0,5$  мкм, а

размер плоского фрагмента зеркала  $d = 1$  м, получим

$$\Delta r = \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 16,6 \cdot 10^6}{1} \text{ м} \sim 10 \text{ м},$$

что не столь существенно при рассмотренных масштабах. Но хотя Солнце и дальше от Марса, чем Земля, – тем не менее, его лучи, строго говоря, не параллельны: ведь диск светила виден с Марса под углом  $\beta \sim \frac{0,5^\circ}{1,5}$ . Так что для обеспечения плотности потока излучения, равного  $q_3$ , придется изменить и площадь зеркала, и радиус его кривизны, что легко сделать на основе приведенных выше рассуждений.

Заметим, что этот собранный поток энергии необходимо срочно использовать, иначе в атмосфере возникнут всплывающие тороидальные термики и к заботливо обогреваемой поверхности со всех сторон задуют холодные ветры. Но это уже метеорологическая проблема.

Вспомним, однако, что до сих пор наши рассуждения были проведены для одного значения угла  $\theta = 0$ . По мере равномерного

движения по круговой орбите этот угол может изменяться со временем:  $\theta = \Omega t$ , где  $\Omega$  – угловая скорость вращения планеты. Следовательно, для того чтобы лучи Солнца, отраженные ареостационарным зеркалом, попадали на тот же участок поверхности Марса, зеркало должно поворачиваться вокруг оси, перпендикулярной плоскости эклиптики, так, чтобы угол падения лучей (и угол отражения) менялся по закону  $\alpha = \frac{\theta}{2}$ . При этом площадь  $S_{\perp}$  – проекция  $S$  на плоскость, перпендикулярную лучам Солнца и, следовательно, определяющая поток излучения, захватываемого зеркалом, – будет изменяться по закону  $S_{\perp} = S \cos \frac{\Omega t}{2} = S \cos \frac{\theta}{2}$  (штриховая прямая на рисунке вверх), так что при  $\theta \rightarrow \pi$  будет  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$  и зеркало перестанет «работать». Но еще рань-

ше, при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , на заданной площадке Марса наступит рассвет и уже прямые лучи Солнца начнут обогреть его поверхность.

Конечно, все эти рассуждения вдумчивого Студента – лишь наброски грандиозного плана. Можно учесть еще много факторов. Например, географическую (ареографическую) широту выбранного участка поверхности, наклон оси вращения Марса по отношению к эклиптике. А также, что излучение Солнца имеет довольно широкий спектр длин волн, из которого для оценок выбрано значение, соответствующее максимуму этого спектра ( $\lambda \approx 0,5$  мкм). Далее, не существует материалов, которые полностью отражали бы электромагнитную волну любой длины. И еще...

Но и сказанного достаточно, чтобы понять необходимость серьезного образования, которое можно получить, например, в Московском физико-техническом институте.

## Где ошибка?

### (Задачи на целые числа и текстовые задачи)

**В ПРЕДЛАГАЕМЫХ ТЕКСТАХ МОГУТ БЫТЬ** ошибки (как в условиях задач, так и в ответах и решениях). Попробуйте их найти там, где они есть.

**Задача 1.** Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 119, а разность квадратов – простое число.

**Ответ:** 60 и 59.

**Решение.** Пусть  $a$  и  $b$  – искомые числа, тогда  $a + b = 119$  и число  $a^2 - b^2$  – простое. Так как  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ , то  $a - b = 1$ . Решая систему уравнений

$$\begin{cases} a + b = 119, \\ a - b = 1, \end{cases}$$

получим, что  $a = 60$ ,  $b = 59$ .

Задача совсем простая и, вроде бы, ошибок нет. Или все-таки есть?

**Задача 2.** Сколько существует натуральных чисел, меньших 200, имеющих ровно 4 делителя и делящихся на 5?

**Ответ:** 10.

**Решение.** У любого числа два делителя определяются однозначно: 1 и само число. Третий делитель по условию равен 5. Значит, четвертый должен быть простым числом: 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Таким образом, искомым чисел ровно 10.

Интересно, а число 10 учтено в этом решении? А может быть, еще что-то упущено?

**Задача 3.** Можно ли число 197 представить в виде суммы двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

**Ответ:** нельзя.

**Первое решение.** Попробуем представить число 197 в виде суммы двух чисел, начиная с суммы  $196 + 1$ . Видим, что суммы цифр данных чисел не равны. Теперь будем отнимать от первого числа по единице и прибавлять единицу ко второму, чтобы сумма сохранялась. Увидим, что как бы мы ни разбивали 197 на два целых числа, сумма цифр этих чисел всегда будет равняться 17. Пусть в одном из чисел суммы сумма цифр равна  $m$ , тогда сумма цифр второго числа  $17 - m$ . Они равны, если  $m = 17 - m$ , откуда получаем, что  $m = 8,5$ . Но  $m$  должно быть целым числом, следовательно, получили противоречие.

Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

**Второе решение.** Пусть  $197 = \overline{xyz} + \overline{ab}$  (понятно, что получить 197, складывая два трехзначных числа, невозможно, а сумма 98 и 99 не обладает требуемым свойством). Тогда  $197 = 100x + 10(y+a) + (z+b)$ . Откуда получаем, что  $x = 1$ ,  $y + a = 9$ ,  $z + b = 7$ . Значит, одно из чисел  $y$  и  $a$  нечетно, а другое – четно. Аналогично для чисел  $z$  и  $b$ . Если суммы цифр слагаемых равны, то  $x + y + z = a + b$ , т.е.  $x + y + z - a - b = 0$ . Но алгебраическая сумма трех нечетных и двух четных чисел не может быть равна нулю.

Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

Решения разные, ответ одинаковый. На первый взгляд, ошибок нет. Так ли это?

**Задача 4.** *Натуральные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют соотношению  $2a^2 + a = 3b^2 - b$ . Докажите, что  $a + b$  – точный квадрат.*

**Решение.** Переноса  $2b^2 - b$  в левую часть равенства, получим, что  $2(a^2 - b^2) + a + b = b^2$ , т.е.  $(a+b)(2a - 2b + 1) = b^2$ . Осталось заметить, что числа  $a + b$  и  $2a - 2b + 1$  взаимно просты, следовательно, каждое из них – точный квадрат.

Какое-то странное равенство в условии. А такие числа  $a$  и  $b$  существуют?

**Задача 5.** *Существует ли конечная геометрическая прогрессия с натуральными членами, сумма всех членов которой равна 211?*

**Ответ:** не существует.

**Решение.** Пусть  $x$  – первый член, а  $q$  – знаменатель прогрессии, тогда  $x(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = 211$ . Так как 211 – простое число, то  $x = 1$ . Значит,

$$x(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Следовательно, в разложении числа  $q$  на простые множители могут присутствовать только числа 2, 3, 5 и 7 (либо в первой, либо в нулевой степени).

Пусть  $q = 2$ , тогда

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 105 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^n - 1 = 105 \Leftrightarrow 2^n = 106,$$

что невозможно.

Пусть  $q = 3$ , тогда

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = 70.$$

Так как  $3^4 = 81 > 70$ , то достаточно прове-

рить  $n = 2; 3; 4$ . Во всех случаях равенство неверно.

Пусть  $q = 5$ , тогда  $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1} = 42$ . Так как  $5^3 = 125 > 42$ , то достаточно проверить  $n = 2$  и  $n = 3$ . В обоих случаях равенство неверно.

Пусть  $q \geq 6$ , тогда  $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} \leq 35$ , но  $q^2 \geq 36$ , поэтому ни при каких натуральных  $n$ , больших двух, неравенство  $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} \leq 35$  выполняться не может.

Может быть, дело в том, что 211 – простое число? Но другие простые числа могут являться суммами прогрессий, например:  $1 + 3 + 9 = 13$  или  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ . Надо бы разобраться.

**Задача 6.** *Докажите, что  $\sqrt{5}$  – иррациональное число.*

**Решение.** Будем доказывать методом «от противного». Предположим, что  $\sqrt{5} = \frac{n}{k}$ , где  $\frac{n}{k}$  – несократимая дробь. Тогда, возводя обе части в квадрат, получим, что  $5k^2 = n^2$ , т.е. число  $n^2$  делится на  $k^2$ . Отсюда  $n \cdot n = n^2$  делится на  $k$ , причем  $k$  взаимно просто с одним из сомножителей (из-за того, что дробь несократима), поэтому другой сомножитель делится на  $k$ . Итак,  $n$  делится на  $k$ , что противоречит предположению о том, что дробь несократима.

Рассуждение очень похоже на «классическое» доказательство, которое есть во многих учебниках. Но что-то смущает. Что именно?

**Задача 7.** *Петя выписал все делители числа  $2^8 \cdot 3^{10}$ . Каждые два числа, имеющие общий делитель, больший 1, он соединил линией. Сколько линий нарисовал Петя?*

**Ответ:** 4752.

**Решение.** Всего делителей у Петиного числа  $9 \cdot 11 = 99$  (двойка может входить с любым показателем степени от 0 до 8, а тройка – с любым показателем степени от 0 до 10). Если их все попарно соединить линиями, то линий получится  $\frac{99 \cdot 98}{2}$ .

Подсчитаем, какие из этих линий являются лишними. Лишние линии соединяют пары взаимно простых чисел. Такие пары образуют числа, в разложение которых не входит двойка, с числами, в разложение которых не входит тройка. Говоря иначе, это пары, образованные степенями двойки и степенями тройки. Степени двойки – это  $1, 2, \dots, 2^8$ ,

всего 9 штук; аналогично, степеней тройки – 11 штук. Всего пар взаимно простых чисел будет  $9 \cdot 11 = 99$ . Поэтому всего линий будет

$$\frac{99 \cdot 98}{2} - 99 = 99 \cdot 48 = 4752.$$

То, что полученный ответ неверен, понятно почти сразу: при подсчете «лишних» линий пара (1; 1) учтена дважды. Но единственная ли это ошибка?

**Задача 8.** *Длина каждой стороны четырехугольника – целое число, причем сумма любых трех из этих чисел делится на четвертое. Верно ли, что в этом четырехугольнике обязательно найдутся хотя бы две равные стороны?*

**Ответ:** верно.

**Решение.** Разделим длины сторон данного четырехугольника на их наибольший общий делитель. Получим длины сторон четырехугольника, также удовлетворяющего условию задачи, при этом наибольший общий делитель длин его сторон равен 1, поэтому наименьшее общее кратное длин сторон равно их произведению. Из условия задачи вытекает, что сумма длин всех сторон делится на каждую из них, а следовательно, делится на их наименьшее общее кратное, т.е. на их произведение.

Предположим, что все длины сторон в исходном четырехугольнике различны. Тогда они различны и в новом четырехугольнике. Пусть  $d$  – длина наибольшей стороны нового четырехугольника. Тогда сумма длин его сторон меньше  $4d$ , а произведение длин сторон не меньше чем  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot d = 6d$ . Следовательно, сумма длин сторон не делится на их произведение.

Полученное противоречие показывает, что в исходном четырехугольнике найдутся хотя бы две равные стороны.

Выглядит правдоподобно. А что на самом деле?

**Задача 9.** *На первом складе в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия, а на втором складе – по 6. С первого склада на второй перевезли 50 ящиков, и среднее количество бракованных изделий в ящике на каждом из складов уменьшилось на 1. Сколько всего ящиков на двух складах?*

**Ответ:** 150.

**Решение.** Пусть на первом складе было  $x$  ящиков, а на втором –  $y$  ящиков. Тогда на первом складе –  $3x$  бракованных изделий, а

на втором –  $6y$ . После перевозки пятидесяти ящиков число бракованных изделий на первом складе будет  $3x = 50 \cdot 3$ , и это равно  $(x - 50) \cdot 2$ , так как среднее число бракованных изделий стало 2. Из уравнения  $3x - 150 = 2x - 100$  находим, что  $x = 50$ .

Аналогично, на втором складе стало  $6y + 150$  бракованных изделий, что равно  $(y + 50) \cdot 5$ . Тогда  $y = 100$ .

Общее количество ящиков:  $x + y = 150$ .

Попробуем проверить это решение, подставив полученные значения в условие. До перевозки на первом складе было 50 ящиков, а на втором – 100. После перевозки на первом стало 0, а на втором 150 ящиков. Но какой смысл говорить о среднем числе бракованных деталей в нуле ящиков? Что-то здесь не так. Что именно?

**Задача 10.** *Один торговец продает сливы по 150 рублей за килограмм, а другой – по 100 рублей. Но у первого косточка составляет треть массы каждой сливы, а у второго – половину. Чьи сливы выгоднее покупать?*

**Ответ:** второго.

**Решение.** У первого торговца мякоть составляет  $2/3$  массы, значит,  $2/3$  килограмма мякоти у него стоит 100 рублей, а 1 кг мякоти – 150 рублей. У второго торговца мякоть составляет половину массы, поэтому ее стоимость – 50 рублей за полкило, а 1 кг мякоти стоит 100 р. Таким образом, у второго покупать выгоднее.

Неужели все так просто? Но если это так, то почему у второго торговца цена мякоти слив не отличается от указанной в условии цены слив с косточками?

**Задача 11.** *Игорь и Паша могут покрасить забор за 4 часа, Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь – за 9 часов. За какое время мальчики покрасят забор, работая вместе?*

**Ответ:** за 4,5 часа.

**Решение.** Пусть производительности мальчиков равны, соответственно,  $i$ ,  $p$  и  $v$  заборов в час. Тогда, по условию задачи,  $i + p = 1/4$ ,  $p + v = 1/12$  и  $i + v = 1/9$ . Складывая эти равенства, находим, что  $2(i + p + v) = 4/9$ , откуда  $i + p + v = 2/9$ . Следовательно, мальчики покрасят забор за  $1/(i + p + v) = 4,5$  часа.

(Продолжение см. на с. 34)

*К указанным открытиям следует прибавить ... многочисленные измерения длины градусной дуги меридиана ...*

Пьер Симон Лаплас

*... корабль «Королева» в открытом море был поражен молнией ... Когда же наступила ночь, то по положению звезд выяснилось, что из трех компасов, имевшихся на корабле, два, вместо того чтобы указывать на север, стали указывать на юг, а третий стал указывать на запад.*

Доминик Франсуа Араго

*«Норвегия» описала круг около северного полюса. Затем мы продолжали путь ... Курс был взят на юг...*

Руаль Амундсен

*Тот факт, что Земля наша вращается вокруг своей оси, можно обнаружить, не глядя на звезды, скажем с помощью так называемого маятника Фуко.*

Ричард Фейнман

# А так ли хорошо знакомы вам физика + география ?

## Вопросы и задачи

С незапамятных времен человек стремился освоить неизведанные земли. Расширяя свои поиски, путешественники, мореплаватели и торговцы нуждались в надежных ориентирах. Рано или поздно они задавались вопросом, как устроена поверхность Земли, насколько Земля тяжела, какую она имеет форму и как движется. Для этого изобретали приборы, помогающие определять местонахождение, рисовали географические карты, искали способы все более точного измерения времени, не забывая поглядывать на звездное небо. А ведь задача узнать, где и когда что-то происходит и как движется, относится к «департаменту» физики – любой ее курс начинается с вопросов, связанных как раз с пространством и временем. Не об этом ли идет речь в приведенных выше цитатах выдающихся ученых и естествоиспытателей?

Подключение науки к решению прикладных вопросов позволило в исторически кратчайший срок не только перейти от примитивных навигационных приборов к точнейшим спутниковым системам, но и беспрецедентно расширить наши знания и об устройстве Земли, и обо всем окружающем ее мире.

Говоря сегодня о союзе географии и физики, мы никак не могли обойти участие в нем астрономии. Тем самым, мы поднялись еще на одну ступеньку на пути к уже заоблачным высотам, куда устремимся в следующем выпуске «Калейдоскопа».

1. Куда придет путешественник, если все время будет идти на северо-запад? (Моря и горы не учитывать.)

2. Человек прошел 10 км на север, 10 км на запад, 10 км на юг и 10 км на восток и при этом вернулся в исходную точку. Откуда он вышел?

3. Являются ли кругосветные путешествия доказательство шарообразности Земли?

4. Почему Магеллану и его команде было легче определять широту, чем долготу?

5. Календарь на корабле Магеллана после кругосветного путешествия разошелся с портовым календарем на один день. Который из календарей был впереди?

6. Какое небесное явление доказывает шарообразность Земли?

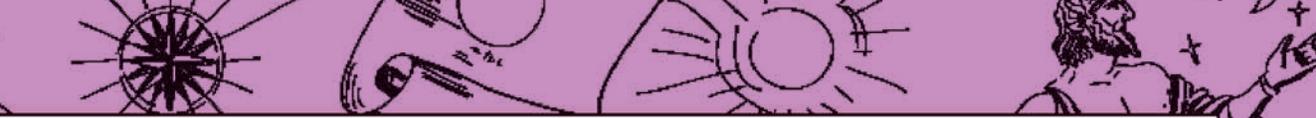
7. Кто из людей и где более всего приближался к центру Земли?

8. Можно ли различить в весе тел и отклонения отвеса в разных точках земного шара считать доказательством вращения Земли?

9. Длина тени, которую отбрасывает предмет, в течение дня меняется. Самая короткая тень – в полдень, к вечеру тень «растет». А есть ли на Земле такое место, где длина тени в течение дня не меняется?

10. Как меняется в течение года длительность дня и ночи на экваторе?

11. Будет ли наблюдаться смена дня и ночи



на Земле, если она перестанет вращаться вокруг своей оси?

**12.** В высоких широтах солнечные лучи летом слабо греют землю, но неожиданно сильно нагревают предметы, возвышающиеся отвесно. Чем это объяснить?

**13.** Почему древние греки, ориентируясь по звездному небу, основной осью считали «восток-запад», а не «север-юг», как наши современники?

**14.** Какая астрономическая система – Птолемея или Коперника – предпочтительнее?

**15.** При полетах на Северный полюс обычные магнитные компасы работают очень плохо и практически непригодны. Отчего?

**16.** Если основанию магнитной стрелки дать возможность свободно перемещаться, то под действием постоянного магнита она не только поворачивается, как в поле Земли, но и движется в сторону магнита. Каковы причины различного поведения стрелки?

#### Микроопыт

Возьмите географическую карту России и глобус. Линейкой измерьте расстояние между Москвой и Хабаровском по карте, а с помощью натянутой нитки – по глобусу. Сравните полученные результаты (не забудьте про масштаб!). Совпали ли они?

#### Любопытно, что...

...около 600 года до новой эры финикийские мореходы совершили географический подвиг – трехлетнее плавание вокруг Африки. Огибая ее с юга, финикийцы видели, как Солнце движется по небу справа налево, а это свидетельствовало о том, что они действительно побывали в южном полушарии!

...еще в 238 году до новой эры греческий ученый Эратосфен Киренский, пользуясь лишь угломером с отвесом и линейкой, сумел рассчитать радиус Земли. Улучшить этот результат удалось только через 2000 лет.

...удобную для моряков карту мира, не потерявшую значения и по сей день, на которой параллели и меридианы изображались прямыми, пересекавшимися под углом  $90^\circ$ , опубликовал в 1569 году фламандец Герард Меркатор.

...Галилей, открыв спутники Юпитера и измерив периоды их обращения, усмотрел в этом небесные часы «с боем» в момент восхо-

да каждого спутника. Такие часы, предположил ученый, можно было бы использовать для определения географической долготы, в чем крайне нуждались мореплаватели.

...в начале XVII века шли долгие споры между последователями Ньютона, считавшими Землю сплюснутой – «мандарином», и астрономами отцом и сыном Кассини, полагавшими ее вытянутой вдоль оси вращения – «лимоном». Измерения длины дуги меридиана около экватора и в полярных областях, проведенные в нескольких экспедициях, подтвердили правоту Ньютона.

...если учесть сплюснутость Земли, то оказывается, что вершина горы Килиманджаро, расположенной вблизи экватора, находится примерно на 6 км дальше от центра Земли, чем вершина самой высокой горы мира – Эвереста.

...еще Христофор Колумб обратил внимание, что во время его плавания магнитная стрелка заметно отклонялась от направления «север-юг». Во избежание волнений на борту, пришлось заявить суеверным морякам, что на это повлияло смещение Полярной звезды. В скором времени такое поведение магнитной стрелки удалось объяснить воздействием магнитного поля Земли.

...современная спутниковая навигация позволяет определять местонахождение и скорость перемещения объекта в любой точке земного шара. Для этого приемной системе необходимо регистрировать поступление сигналов по меньшей мере от четырех спутников, по задержке каждого сигнала вычислять расстояния до них, а вместе с тем – и свое точное положение.

#### Что читать в «Кванте» по теме «Физика+ география»

(публикации последних лет)

1. «Физический калейдоскоп» – 2012. Приложение №3, с. 16;
2. «Про волчок и гироскоп» – 2015, №1, с. 28;
3. «Как дятел Спятел планировал отпуск» – 2015, № 5/6, с. 28;
4. «С полюса – на полюс» – 2016, Приложение №2, с. 62;
5. «Расстояние на сфере» – 2017, №4, с. 36;
6. «Сказка про Буратино и его глобус» – 2017, №11, с.24.

Материал подготовил А.Леонович



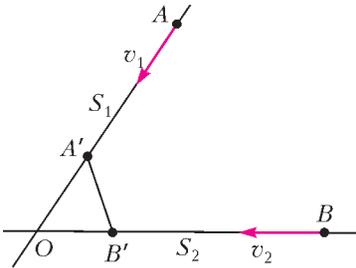
(Начало см. на с. 29)

При решении этой, совсем стандартной, задачи очень трудно допустить ошибку. Наконец-то, все верно или что-то смущает?

**Задача 12.** Два корабля идут по морю пересекающимися курсами с постоянными скоростями. В 9.00 расстояние между ними было 6 миль, в 10.00 – 5 миль, в 11.00 – 2 мили. В какой момент времени расстояние между кораблями – наибольшее из возможных?

**Ответ:** в 8 часов 24 минуты.

**Решение.** Пусть корабли двигались по прямым  $a$  и  $b$ , пересекающимся в точке  $O$ , и в 9.00 они находились в точках  $A$  и  $B$  (см. рисунок). Пусть также  $OA = S_1$  (миль),  $OB = S_2$  (миль), а скорости кораблей рав-



ны, соответственно,  $v_1$  миль в час и  $v_2$  миль в час. Тогда через  $t$  часов корабли будут находиться в точках  $A'$  и  $B'$ , пройдя  $v_1 t$  миль и  $v_2 t$  миль соответственно.

Из треугольника  $A'OB'$  по теореме косинусов получим, что

$$A'B'^2 = (S_1 \pm v_1 t)^2 + (S_2 \pm v_2 t)^2 - 2(S_1 \pm v_1 t)(S_2 \pm v_2 t) \cos \angle AOB$$

(знаки в скобках учитывают, что корабли могут оказаться и на лучах, дополнительных к  $OA$  и  $OB$ ). Полученное уравнение показывает, что зависимость квадрата расстояния между кораблями от времени является квадратичной функцией.

Пусть ее уравнение  $f(t) = at^2 + bt + c$ . Выберем в качестве начала отсчета времени 9 часов 00 минут. Тогда из условия задачи следует, что  $f(0) = c = 36$ ,  $f(1) = a + b + c = 25$ ,  $f(2) = 4a + 2b + c = 4$ . Решая систему уравнений

$$\begin{cases} c = 36, \\ a + b + c = 25, \\ 4a + 2b + c = 4, \end{cases}$$

получим, что

$$a = -5, b = -6, c = 36.$$

Таким образом, функция имеет вид  $f(t) = -5t^2 - 6t + 36$ . Свое наибольшее значение она принимает в точке  $t_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{5}$ . Так как  $f\left(-\frac{3}{5}\right) > 0$ , то в этот же момент времени будет наибольшим и расстояние между кораблями.

Задача необычная и решение не совсем стандартное. Подумайте!

*Статья написана по материалам  
Творческих конкурсов учителей математики,  
Московских математических регат,  
Турнира имени М.В.Ломоносова  
и вузовских олимпиад*

*Публикацию подготовил А.Блинков*

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

# Вращение от вибрации

**М. СТАРШОВ**

**В** ПРЕВОСХОДНОЙ КНИГЕ ДЖ.УОКЕРА «Физический фейерверк» описаны многочисленные физические явления, опыты и загадки. Но имеется один недостаток: все это

богатство автор явно собирал по другим книгам и журналам, а проверить описания практически человеку не хватит ни сил, ни времени.

Листая эту «тысячу и одну физику», испытываешь желание повторить, а то и проверить один или другой эксперимент. А старый человек, который давным-давно учился в мужской школе, часто испытывает удовольствие заметить, что наши послевоенные мальчишки умели делать многие вещи раньше и лучше американских ученых-физиков.

Вот один характерный пример. «Волшебный пропеллер» нам описывают как палочку с зарубками и пропеллером на гвоздике, вбитом в ее торец. Пропеллер крутится, когда другой палочкой водят по зарубкам.

Как все просто! Да сейчас это сделаю... И, найдя палочку, начинаю ножом делать на ней зарубки. Но вспоминаю, что лет семьдесят назад не только увидел этот самый фокус на переменке в руках одноклассника, но и повторил его в тот же день на глазах товарищей по двору. Да ведь и делать-то ничего не надо было: на аккуратно очиненный карандаш надевалось лезвие безопасной бритвы, которым мы этот карандаш и точили, карандаш горизонтально зажимался в ложбинке между большим и указательным пальцами, а выпрямленными средним и безымянным пальцами надо было с некоторым усилием вести по парте или по скамейке во дворе. Лезвие вращалось, как винт у самолета!

Однако в таком виде опыт описывать трудно. Вот если раз увидеть, дело другое, любой мальчишка поймет и повторит.

А вот еще более простой и современный вариант, который доступен и любой девочке. В крышке от какого-то старого лекарства увидел готовый пропеллер с шестью красивыми лопастями и вырезал его с помощью перочинного ножа и ножниц. На фотографии (рис.1) его видно рядом с другим «оборудованием» – авторучкой без пишущего узла, в которую вставляется пропеллерчик, и аккумуляторная бритва – она хорошо вибрирует, дрожит при включении.

Вторая фотография (рис.2) показывает, как надо держать ручку с пропеллером, и



Рис. 1. Заготовки



Рис. 2. Сборка

остается только прижать к ручке уголок работающей бритвы. Пропеллер крутится как бешеный.

Студентам-физикам предлагаемый опыт помогает понять связь вращательного и колебательного движений. И это способствует пониманию такого красивого и важного физического явления, как эффект Зеемана.

Вариантов этой эффектной демонстрации много. Трудолюбивый мальчик может вырезать из кусочка дерева, да просто из дощечки, модель самолета, свободно закрепить небольшой пропеллер из жести или даже картона (рис.3). Колебания можно



Рис. 3. Еще один вариант

организовать той же бритвой или прочной расческой. От вибрации корпуса самолета пропеллер отлично вращается.

И уж совсем просто, для самых ленивых, – пропеллер свободно вставляете своей осью в трубочку от старой большеобъемной шариковой ручки или в трубочку для коктейля и легонько ведете по трубочке расческой. Через пять минут освоитесь, найдете место и для пальцев, и для зубцов расчески.

Удачи вам!

# И снова котенок на лестнице

И. АКУЛИЧ

**А**ВТОР ЭТОЙ СТАТЬИ НЕСКОЛЬКО ДНЕЙ подряд развлекался тем, что предлагал своим знакомым вот такую задачу.

**Задача.** Лестница  $AB$ , которая нижним концом опирается на горизонтальный пол, а верхним концом прислонена к вертикальной стене (рис.1), под влиянием собственного веса опускается вниз до самого пола. По какой траектории движется при этом котенок, сидящий точно на середине лестницы? Трения нет, лестницу считать однородной по длине, массой котенка пренебречь.

Надо сказать, процесс опроса можно было назвать развлечением лишь с натяжкой, потому что редко когда приходилось выслушивать и со скорбью воспринимать такое множество уничижительных заявлений.

Большинство отвечающих говорили примерно так: «Что ты лезешь с такой древностью? Задаче этой – в обед сто лет (а то и больше)! В половине сборников про геомет-

рические места точек она имеется, и решение всем давно известно. Возьмем произвольное промежуточное положение лестницы  $MN$  и соединим ее середину  $C$  с вершиной  $O$  угла между полом и стеной (рис.2). Тогда  $OC$  – медиана гипотенузы прямоугольного треугольника  $MON$  (где наша лестница и есть гипотенуза). Осталось вспомнить (школьный курс геометрии), что длина такой медианы равна половине гипотенузы. А поскольку длина гипотенузы-лестницы неизменна, то расстояние от вершины прямого угла до котенка будет постоянно в течение всего скольжения и равно половине длины лестницы. Значит, траектория представляет собой дугу окружности, вершина которой расположена в точке  $O$ , а радиус равен половине длины лестницы. В частности, если изначально лестница практически вертикальна, то получится четверть окружности (рис.3), а если наклонна – то дуга будет короче, но все равно дугой окружности и останется. А уж при чем здесь трение, однородность лестницы и масса котенка – вообще непонятно. Какая разница?» И добавляли в заключение: «Не тревожил бы ты несчастное животное. Ему уже, небось, не мяукает, а икается!»

Под напором таких аргументов оставалось только горестно вздыхать – но только над несправедливостью оппонентов. Ибо на самом деле трение, точнее – его отсутствие, и массы лестницы и котенка имеют весьма немаловажное значение. Дело в том, что в

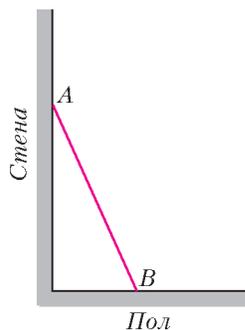


Рис. 1

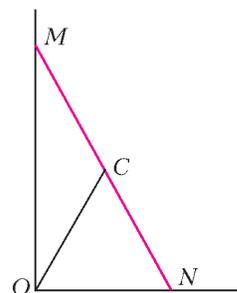


Рис. 2

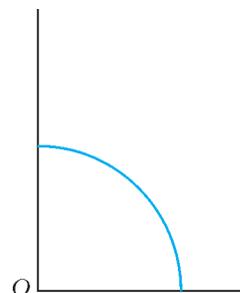


Рис. 3



«Не тревожил бы ты несчастное животное. Ему уже, небось, не мяукает, а икается!»

Под напором таких аргументов оставалось только горестно вздыхать – но только над несправедливостью оппонентов. Ибо на самом деле трение, точнее – его отсутствие, и массы лестницы и котенка имеют весьма немаловажное значение. Дело в том, что в

приведенном доказательстве неявно подразумевается, что при движении лестницы один из ее концов все время скользит вниз по вертикальной стене – от точки  $A$  к точке  $O$ , а второй конец скользит по горизонтальному полу – вправо от точки  $B$ .

А разве не так? Вот именно – не так! По крайней мере, частично: верхний конец лестницы *не всегда* будет соприкасаться со стеной – в некоторый момент он от нее *оторвется!*

Какой же это момент? И почему, собственно, конец должен оторваться? Давайте разберемся.

Предположим, что такого отрыва не случится. При соскальзывании центр масс лестницы (при равномерном распределении массы лестницы по длине это как раз ее середина  $C$ ) движется вниз и вправо (одновременно имеет место также и вращение лестницы относительно своего центра масс против часовой стрелки, но об этом – чуть позже). В начальный момент времени (когда лестница только начала движение) скорость центра масс, естественно, близка к нулю. Затем, по мере опускания лестницы, горизонтальная составляющая скорости центра масс, разумеется, растет. Но для этого на лестницу

должна действовать какая-то сила, направленная вправо.

Вообще-то на лестницу действуют три силы (рис.4).

1) Сила тяжести  $\overline{mg}$  (где  $m$  – масса лестницы,  $g$  – ускорение свободного падения), которую можно считать приложенной к

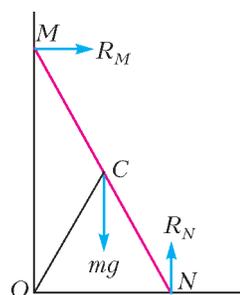


Рис. 4

середине лестницы  $C$ . Она направлена вертикально вниз и влиять на горизонтальную составляющую скорости лестницы, естественно, не может.

2) Сила реакции  $\overline{R}_N$  со стороны пола в точке  $N$ . При отсутствии трения эта сила направлена строго вертикально вверх и потому тоже на горизонтальную составляющую скорости лестницы не влияет.

3) Сила реакции  $\overline{R}_M$  со стороны стены в точке  $M$ . А вот это – то, что надо, поскольку если трения нет, то эта сила направлена именно по горизонтали вправо. Зададим

сразу упреждающий вопрос: а может ли она быть направлена влево? Конечно, нет: ведь стена не может «тянуть» лестницу к себе (а может только «толкать», вернее – «отталкивать от себя»). Запомним пока что этот факт.

Теперь рассмотрим, что происходит с горизонтальной составляющей скорости центра масс лестницы к моменту завершения ее падения – когда точка  $M$  вот-вот совпадет с точкой  $O$ . Здесь скорость точки  $M$ , очевидно, направлена вертикально вниз, т.е. перпендикулярно лестнице. Поэтому проекция скорости точки  $M$  на лестницу (на прямую, совпадающую по направлению с лестницей) равна *нулю*. А это означает, что поскольку лестница – предмет нерастяжимый, то в любой момент времени проекции скоростей *всех ее точек* на саму лестницу *одинаковы*. Но тогда и проекция скорости центра масс на лестницу равна нулю, т.е. горизонтальная составляющая скорости центра масс отсутствует. Куда же она делась? Ведь для этого на лестницу должна в течение какого-то времени действовать сила, направленная влево, а таковой-то и нет! Значит, и предположение о том, что левый (он же верхний) конец лестницы будет все время касаться вертикальной стены, – неверно.

Что же будет на самом деле? Сначала лестница будет соскальзывать «классически» – касаясь стены и пола обоими концами. Но когда горизонтальная составляющая скорости центра масс лестницы достигнет максимального значения, контакт лестницы со стеной прекратится, произойдет отрыв, и в дальнейшем эта самая горизонтальная составляющая скорости останется неизменной. Лестница будет двигаться вправо, одновременно опускаясь и поворачиваясь (касаясь при этом пола в точке  $N$ ), все более удаляясь от стены. И с этого момента траектория котенка *перестанет* быть дугой окружности с центром в точке  $O$ . Мы еще не знаем, что это за кривая, но наши оппоненты уже успешно посрамлены.

Попробуем определить момент отрыва, выяснив, при каком положении лестницы горизонтальная составляющая скорости ее середины станет максимальной. Пусть в какой-то момент времени (пока еще лестница касается стены) угол между лестницей и стеной равен  $\angle OMN = \alpha$  (тогда и  $\angle MOC = \alpha$ ), а длина лестницы равна

$MN = h$  (и тогда, конечно,  $OC = \frac{h}{2}$ ). Кроме того, пусть в начальный момент времени угол между лестницей и стеной равнялся  $\angle OAB = \alpha_0$ . Так как трения нет, удобно использовать закон сохранения энергии. Первоначально центр масс лестницы расположен на высоте  $\frac{h}{2} \cos \alpha_0$  над уровнем пола. Когда же угол между лестницей и стеной стал равен  $\alpha$  (разумеется,  $\alpha > \alpha_0$ ), высота центра масс снизилась до  $\frac{h}{2} \cos \alpha$ . Поэтому уменьшение потенциальной энергии составило

$$\Delta E_{\text{п}} = mg \frac{h}{2} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha).$$

И это уменьшение преобразовалось в кинетическую энергию лестницы, которая состоит из двух слагаемых – энергий поступательного и вращательного движений:

$$E_{\text{к}} = E_{\text{к пост}} + E_{\text{к вращ}}.$$

С каждой из них придется повозиться отдельно.

Кинетическая энергия поступательного движения определяется скоростью центра масс  $C$ , которую мы обозначим через  $v$ . Тогда

$$E_{\text{к пост}} = \frac{mv^2}{2}.$$

Интересно, а как эта скорость  $v$  направлена? Вопрос не праздный, ибо нам вскорости предстоит найти горизонтальную составляющую этой скорости. Поскольку мы выяснили, что точка  $C$  движется по окружности с центром в точке  $O$  и радиусом  $OC = \frac{h}{2}$ , то скорость  $v$  направлена перпендикулярно отрезку  $OC$  и потому образует с горизонтальной углы  $\alpha$ .

Теперь найдем кинетическую энергию вращения лестницы относительно ее середины.

Она равна  $\frac{I\omega^2}{2}$ , где  $I$  – момент инерции лестницы,  $\omega$  – угловая скорость вращения. Что касается момента инерции, то его значение легко найти в справочнике: в нашем случае  $I = \frac{mh^2}{12}$ . А как быть с угловой скоростью? Здесь нам поможет понятие *мгновенного центра вращения*. При плоскопараллельном движении (когда скорости всех точек располагаются в одной плоскости или в

параллельных плоскостях – что как раз имеет место с лестницей) в любой момент времени можно указать точку, скорость которой равна нулю и относительно которой именно в этот момент вращается тело. Такая неподвижная (в данный миг) точка и называется мгновенным центром вращения. Для ее определения следует всего лишь найти две точки тела, скорости которых не параллельны, и провести через них перпендикуляры к скоростям – точка пересечения перпендикуляров как раз и является мгновенным центром вращения. После этого останется только, поделив скорость любой точки тела на радиус вращения, вычислить угловую скорость  $\omega$ . Для нашей лестницы  $MN$  удобно взять ее концы – точки  $M$  и  $N$ , потому что направления скоростей в этих точках известны – вниз и вправо соответственно. Точка пересечения перпендикуляров к этим скоростям попадет в точку  $D$  (рис.5), которая, как

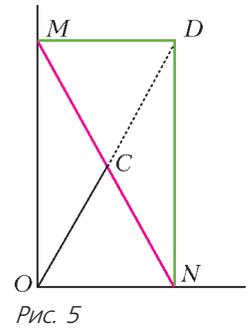


Рис. 5

легко видеть, является четвертой вершиной прямоугольника  $NOMD$  и потому симметрична точке  $O$  относительно середины лестницы  $C$ . Итак, мгновенный центр вращения – точка  $D$  – найден. В качестве точки для вычисления угловой скорости проще всего взять середину лестницы  $C$ . Ее скорость мы уже обозначили через  $v$ , а радиус вращения равен  $DC = OC = \frac{h}{2}$ .

Поэтому  $\omega = \frac{v}{OC} = \frac{2v}{h}$ . Окончательно получаем

$$E_{\text{к вращ}} = \frac{(mh^2/12)(2v/h)^2}{2} = \frac{mv^2}{6}.$$

Таким образом,

$$E_{\text{к}} = E_{\text{к пост}} + E_{\text{к вращ}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{6} = \frac{2mv^2}{3}.$$

Приравняв кинетическую энергию к уменьшению потенциальной, имеем

$$\frac{2mv^2}{3} = mg \frac{h}{2} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha),$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{3gh}{4} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha)}.$$

И вот теперь пришла пора найти горизонтальную составляющую этой скорости. Нет ничего проще – мы уже выяснили, что скорость центра масс образует угол  $\alpha$  с горизонтом, так что ее горизонтальная составляющая равна

$$v_{\Gamma} = v \cos \alpha = \sqrt{\frac{3gh}{4} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha)} \cos \alpha .$$

Но нас больше интересует *максимум* этой величины, а именно при каком угле  $\alpha$  он достигается. Забавно, но, несмотря на устрашающий вид функции, его можно легко найти. Для этого внесем самый правый косинус под знак радикала и преобразуем выражение к виду

$$v_{\Gamma} = \sqrt{\frac{3gh}{8} (2 \cos \alpha_0 - 2 \cos \alpha) \cos^2 \alpha} .$$

Ясно, что максимум этого выражения достигается при том же  $\alpha$ , при котором максимально подкоренное выражение, а конкретнее – произведение  $(2 \cos \alpha_0 - 2 \cos \alpha) \cos^2 \alpha$ . Рассмотрим его как произведение трех чисел, равных  $(2 \cos \alpha_0 - 2 \cos \alpha)$ ,  $\cos \alpha$  и  $\cos \alpha$ . Сумма их постоянна и равна  $2 \cos \alpha_0$ , поэтому произведение достигает максимума, когда они все равны между собой, т.е.  $2 \cos \alpha_0 - 2 \cos \alpha = \cos \alpha$ . Отсюда находим «экстремальное» значение угла, обозначив его  $\alpha_3$ :

$$\alpha_3 = \arccos \left( \frac{2}{3} \cos \alpha_0 \right) .$$

В частности, если в начальный момент лестница практически вертикальна ( $\alpha_0 = 0$ ), то отрыв произойдет при угле лестницы с вертикалью

$$\alpha_3 = \arccos \frac{2}{3} \approx 48,2^\circ .$$

При других начальных углах угол отрыва от стены будет иной, но отрыв, как легко видеть, *произойдет непременно*.

Что касается дальнейшей судьбы лестницы (уже после отрыва от стены), то траектория ее середины представляет собой довольно сложную трансцендентную кривую, которую можно построить только численно. Опуская нудные вычислительные подробности, приведем зависимости горизонтальной и вертикальной скоростей движения середины лестницы в зависимости от угла наклона лестницы к вертикали, в диапазоне значений угла  $\alpha$  от  $\alpha_3$  до  $90^\circ$ , лишь для самого

простейшего случая, когда  $\alpha_0 = 0$ :

$$v_{\Gamma} = \frac{\sqrt{gh}}{3}, \quad v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{gh}{3} \frac{8 - 9 \cos \alpha}{3 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}}} .$$

Никаких положительных эмоций такое выражение не вызывает. Но его вполне достаточно, чтобы построить траекторию движения центра лестницы после отрыва ее от стены «по точкам» через малые промежутки времени и сравнить, насколько далеко отстоит полученная кривая от той окружности, по которой спускался бы котенок, если бы верхний конец лестницы не отрывался от стены. На рисунке 6 синим цветом проведена та самая четверть окружности  $PR_1$ , по которой

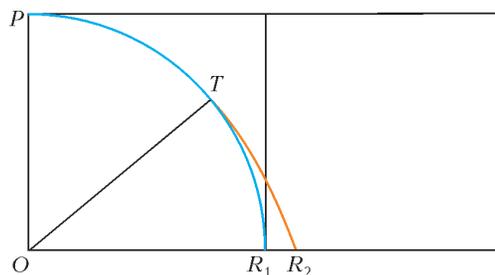


Рис. 6

опускался бы котенок, если бы лестница не отрывалась от стены. И поначалу котенок так и движется, но в точке  $T$  такой, что  $\angle POT = \arccos \frac{2}{3} \approx 48,2^\circ$ , вследствие отрыва лестницы от стены его дальнейшей траекторией становится оранжевая кривая  $TR_2$  (а не синяя дуга  $TR_1$ ). Для наглядности указанная четверть окружности заключена в квадрат и справа пристроен еще один такой же квадрат. Анализ рисунка позволяет сделать вывод, что в результате отрыва центр лестницы в самом конце падения «отскочит» не очень-то далеко. Если, скажем, длина лестницы равна 10 м, то длина отрезка  $R_1R_2$  лишь чуть превысит 0,6 м. Для других начальных положений лестницы это отклонение от «теории» окажется еще меньше, но оно будет иметь место всегда.

Итак, при отсутствии трения неизбежен отрыв лестницы от стены. А если трение есть? Этот вопрос потруднее. При наличии трения аналитическое решение задачи отсутствует, и ее также можно решить только численно, что и было сделано. (Очень полезной оказалась книга А.Кондратьева и А.Ляпцева «Физика.

Задачи на компьютере», где, в частности, приводится и задача о лестнице у стены.)

Нас, впрочем, больше интересует более узкий вопрос: возможны ли такие сочетания коэффициентов трения и начального угла наклона, чтобы лестница соскальзывала на пол *без отрыва* от стены? Оказывается, да! Для исследований в этой области были рассмотрены три частных случая, которые представляются наиболее интересными.

1) Трение между лестницей и полом отсутствует, а между лестницей и стеной – имеется; коэффициент трения равен  $\mu$ .

2) Трение между лестницей и стеной отсутствует, а между лестницей и полом – имеется; коэффициент трения равен  $\mu$ .

3) Имеется трение как между лестницей и полом, так и между лестницей и стеной; при этом коэффициент трения одинаков и равен  $\mu$ .

Первый случай оказался самым легким (а выводы – самыми ожидаемыми): если трения лестницы о пол нет, то при любом коэффициенте трения лестницы о стену и любом начальном угле  $\alpha_0$  лестница оторвется от стены. Поэтому здесь котенку не суждено прокатиться до самого пола по идеальной дуге окружности.

Второй случай более содержателен. Выяснилось, что для любого коэффициента трения  $\mu$  между лестницей и полом можно указать такое *минимальное* значение угла  $\alpha_{0\min}$ , что для любого начального  $\alpha_0 > \alpha_{0\min}$  лестница опустится на пол без отрыва от стены. Однако при анализе результатов открылось удивительное (на первый взгляд) явление: непонятная зависимость  $\alpha_{0\min}$  от  $\mu$ . А именно: с ростом  $\mu$  от 0 до величины, примерно равной 1,43, значение  $\alpha_{0\min}$  монотонно убывает от  $90^\circ$  до приблизительно  $70,8^\circ$ , потом же происходит заметный «излом», и далее  $\alpha_{0\min}$  только растет, стремясь снова к  $90^\circ$  (рис.7). Почему? Откуда такая аномалия?

К счастью, секрет оказался прост. Дело в том, что при наличии трения на значение первоначального угла  $\alpha_0$  между лестницей и стеной накладывается дополнительное ограничение: он должен быть больше некоторой минимальной допустимой величины, поскольку в противном случае лестница вообще не придет в движение – тому воспрепятствуют силы трения. Наименьшее допус-

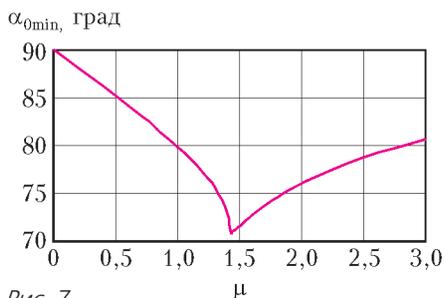


Рис. 7

тимое значение угла  $\alpha_0$  для того, чтобы лестница все-таки поползла вниз, равно  $\arctg \frac{2\mu_2}{1-\mu_1\mu_2}$ , где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – коэффициенты трения между лестницей и стеной, а также между лестницей и полом соответственно (если же  $\mu_1\mu_2 \geq 1$ , то лестница не придет в движение ни при каком исходном угле наклона). В частности, если трения о стену нет,  $\mu_1 = 0$ , и  $\mu_2 = \mu$ , то минимальный первоначальный угол составляет  $\arctg 2\mu$ , и это значение, как легко видеть, возрастает с ростом  $\mu$ , устремляясь к  $90^\circ$ . Как раз при  $\mu \approx 1,43$  эта величина превосходит  $70,8^\circ$ , и потому в дальнейшем  $\alpha_{0\min}$  вынужденно следует за ней, не смея становиться ниже – ибо тогда лестница вообще не придет в движение.

Третий случай в общем и целом напоминает второй, но достаточно ограничиться значениями  $\mu < 1$  (при  $\mu \geq 1$  лестница останется неподвижной при любых углах наклона). И график зависимости  $\alpha_{0\min}$  от  $\mu$  имеет внешне похожий вид (рис.8). Только здесь

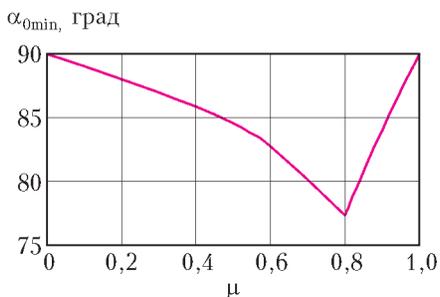


Рис. 8

«критическое» значение коэффициента трения другое – около 0,8.

Вот вам и котенок на лестнице! А сначала все казалось таким простым и очевидным.

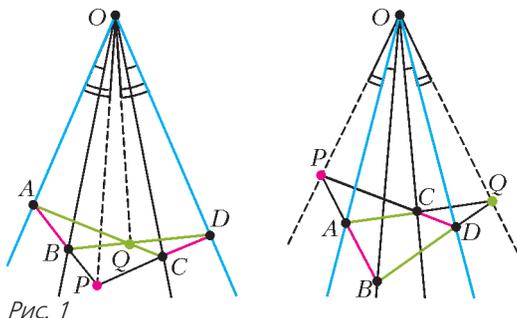
# Теорема об ИЗОГОНАЛЯХ

А.КУЛИКОВА, Д.ПРОКОПЕНКО

**П**РЯМЫЕ, ПРОХОДЯЩИЕ ЧЕРЕЗ ВЕРШИНУ угла и симметричные относительно его биссектрисы, мы будем называть **изогоналями** относительно этого угла. В статье пойдет речь о следующей важной теореме и ее применениях.

**Теорема об изогоналях.** Пусть  $OB$  и  $OC$  – изогонали угла  $AOD$ . Прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $Q$ , прямые  $AB$  и  $CD$  – в точке  $P$ . Тогда  $OP$  и  $OQ$  – также изогонали относительно угла  $AOD$ .

На рисунке 1 приведены два из возможных случаев расположения изогоналей  $OP$  и  $OQ$  относительно угла  $AOD$ . Для удобства синим цветом мы будем выделять стороны исходного угла, а красным и зеленым цветом – отрезки, лежащие внутри равных углов (отрезки  $AB$  и  $CD$  или  $AC$  и  $BD$ ).



В конце статьи приведем одну полезную лемму о свойстве и признаке изогоналей и докажем теорему. А сначала покажем, как работает эта теорема.

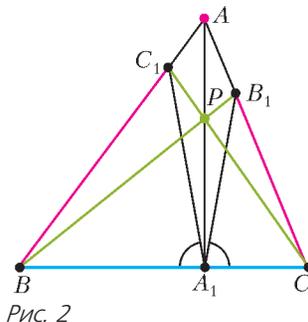
Перейдем к задачам. Начнем с частного случая, когда изогонали  $OB$  и  $OC$  совпали.

Эта статья является переработанным вариантом доклада ученицы 11 класса А.Куликовой на Московской математической конференции школьников (ММКШ) в 2016 году. Второй автор статьи был руководителем этой работы.

## Биссектриса как совпавшие изогонали

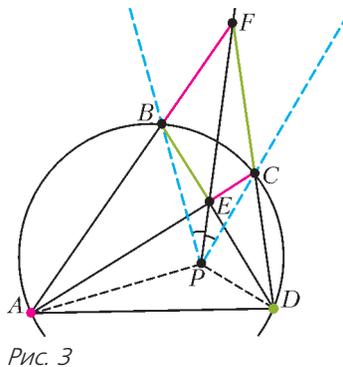
Первая задача эквивалентна задаче М141 из «Задачника «Кванта».

**Задача 1.** В треугольнике  $ABC$  медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке (рис.2). Оказалось, что  $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$ . Докажите, что  $AA_1$  – высота.



**Решение.** Применим теорему об изогоналях к развернутому углу  $BA_1C$  и изогоналям  $A_1C_1$  и  $A_1B_1$ . Тогда  $A_1A$  и  $A_1P$  – совпавшие изогонали угла  $BA_1C$ , т.е.  $A_1A$  – биссектриса угла  $BA_1C$ . Следовательно,  $A_1A$  – высота треугольника  $ABC$ .

**Задача 2** (Санкт-Петербургская олимпиада, 2008). Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$ . Диагонали  $AC$  и  $DB$  пересекаются в точке  $E$ , а прямые, содержащие противоположающиеся стороны, пересекаются в точке  $F$  (рис.3). На прямой  $EF$  взяли такую точку



$P$ , что  $\angle BPE = \angle EPC$ . Докажите, что  $\angle APE = \angle DPE$ .

**Решение.** Заметим, что  $PE$  – совпавшие изогонали угла  $BPC$ . Точки  $E$  и  $F$  – точки на этой изогонали. Точки  $A$  и  $D$  – пересечение прямых  $FB$  и  $CE$ ,  $FC$  и  $BE$  соответственно. По теореме об изогоналях,  $PA$  и  $PD$  также являются изогоналями угла  $BPC$ . Следова-

тельно, прямые  $PA$  и  $PD$  симметричны относительно биссектрисы угла  $BPC$ . Можно показать, что случай  $\angle APE + \angle DPE = 180^\circ$  не реализуется, т.е.  $\angle APE = \angle DPE$ , что и требовалось доказать.

Интересно, что при решении задачи не использовалось то, что четырехугольник вписанный, значит, утверждение задачи верно для любых выпуклых четырехугольников.

**Упражнение 1.** В треугольнике  $ABC$  чевианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Оказалось, что  $A_1A$  – биссектриса угла  $C_1A_1B_1$ . Докажите, что  $AA_1$  – высота.

**Задача 3** (Турнир городов, 2006). В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AA'$ , на отрезке  $AA'$  выбрана точка  $X$  (рис. 4). Прямая  $VX$  пересекает  $AC$  в точке  $V'$ , а прямая  $CX$  пересекает  $AB$  в точке  $C'$ .

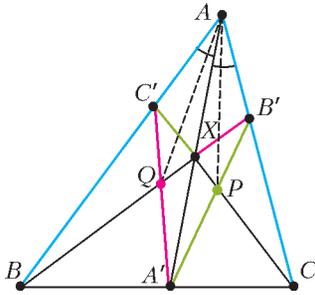


Рис. 4

Отрезки  $A'B'$  и  $CC'$  пересекаются в точке  $P$ , а отрезки  $A'C'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что углы  $PAC$  и  $QAB$  равны.

**Решение.** Для решения задачи опять удобно рассматривать биссектрису  $A'A$  как две совпавшие изогоналы угла  $BAC$ . Точки  $X$  и  $A'$  лежат на изогонали, а  $C'$  и  $B'$  – на сторонах угла. Точки  $Q$  и  $P$  – пересечение прямых  $XB'$  и  $A'C'$ ,  $XC'$  и  $A'B'$  соответственно. По теореме об изогоналях,  $AQ$  и  $AP$  – тоже изогоналы угла  $BAC$ , т.е.  $\angle PAC = \angle QAB$ .

**Упражнения**

**2** (Украина, отбор на Международную олимпиаду, 2004). Пусть  $M$  – точка на биссектрисе  $AL$  треугольника  $ABC$ . Через  $L$  провели прямую, пересекающую  $AB$  в точке  $P$ , а продолжение  $AC$  за точку  $C$  – в точке  $Q$ . Пусть  $N$  – пересечение  $BM$  и  $PQ$ , а  $K$  – пересечение  $QM$  и  $BC$ . Докажите, что  $\angle NAL = \angle KAL$ .

**3.** На прямой, содержащей биссектрису угла  $B$  треугольника  $ABC$ , выбраны две точки  $K$  и  $L$  так, что  $B$  лежит между  $K$  и  $L$ . Прямые  $CK$  и  $AL$  пересекаются в точке  $M$ , прямые  $AK$  и  $CL$  – в точке  $N$ . Докажите, что  $\angle MBA = \angle NBC$ .

**4** (Санкт-Петербург, Олимпиада ФМЛ 239, 2016). В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  – в точке  $Q$ . На диагонали  $AC$  нашлась такая точка  $T$ , что треугольники  $BTP$  и  $DTQ$  соответственно подобны. Докажите, что  $BD \parallel PQ$ .

**Указание.** Из подобия треугольников следует, что  $TB$  и  $TD$  – изогоналы угла  $PTQ$ . Точки  $A$  и  $C$  – пересечение прямых  $PB$  и  $QD$ ,  $BQ$  и  $PD$  соответственно. По теореме об изогоналях,  $TA$  и  $TC$  – совпавшие изогоналы. Следовательно,  $TC$  – биссектриса угла  $PTQ$ . Осталось заметить, что треугольники  $ATP$  и  $ATQ$  подобны по двум углам (почему равны углы  $P$  и  $Q$ ?) и имеют общую сторону, поэтому они равны.

**Общий случай**

Интересно, что в следующих двух задачах используются, на первый взгляд, совершенно разные конструкции. Задача 4 про треугольник, а задача 5 про параллелограмм.

**Задача 4.** На сторонах  $AB$  и  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  внешним образом построены квадраты  $ABFE$  и  $ACGT$  (рис. 5). Докажите, что точка  $P$  пересечения

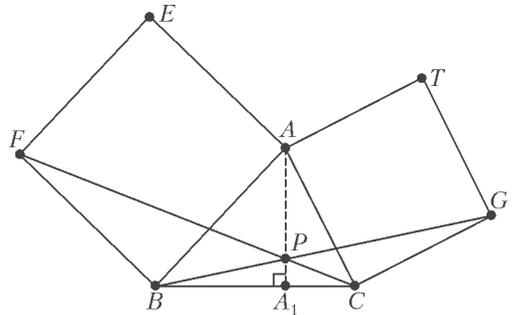


Рис. 5

чения прямых  $CF$  и  $BG$  лежит на высоте  $AA_1$ .

**Задача 5** (А.Полянский, Московская устная олимпиада по геометрии, 2010). Из вершины  $A$  параллелограмма  $ABCD$  опущены перпендикуляры  $AM$  на  $BC$  и  $AN$  на  $CD$ ,  $P$  – точка пересечения  $BN$  и  $DM$  (рис. 6). Докажите, что прямые  $AP$  и  $MN$  перпендикулярны.

Оказывается, что обе эти задачи являются частным случаем следующей конструкции.



Следовательно,  $СК$  – биссектриса угла  $BCD$ .

Прежде чем перейти к задаче 8, попробуйте самостоятельно решить такое упражнение.

**Упражнение 7** (П.Кожевников). На диагонали  $AC$  ромба  $ABCD$  взята произвольная точка  $E$ , отличная от точек  $A$  и  $C$ , а на прямых  $AB$  и  $BC$  взяты точки  $N$  и  $M$  соответственно так, что  $AE = NE$  и  $CE = ME$ . Пусть  $K$  – точка пересечения прямых  $AM$  и  $CN$ . Докажите, что точки  $K, E$  и  $D$  лежат на одной прямой.

**Задача 8** (В.Ясинский, Олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, заочный тур, 2013). На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взята произвольная точка  $C_1$  (рис.10).

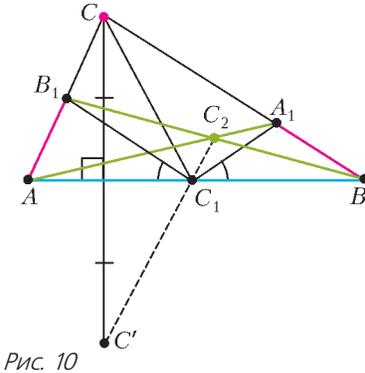


Рис. 10

Точки  $A_1, B_1$  на лучах  $BC$  и  $AC$  таковы, что  $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$ . Прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $C_2$ .

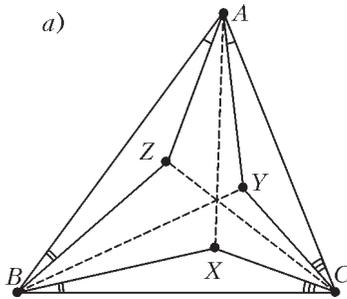


Рис. 11

Докажите, что все прямые  $C_1C_2$  проходят через одну фиксированную точку.

**Решение.** Рассмотрим развернутый угол  $AC_1B$ , для которого  $C_1B_1$  и  $C_1A_1$  – изогоналы. Точки  $C$  и  $C_2$  – пересечение прямых  $AB_1$  и  $BA_1$ ,  $AA_1$  и  $BB_1$  соответственно. По теореме об изогоналях,  $C_1C_2$  и  $C_1C$  – изогоналы

угла  $AC_1B$ . Тогда прямые  $C_2C_1$  и  $CC_1$  симметричны относительно прямой  $AB$ . Следовательно, прямая  $C_2C_1$  всегда проходит через точку  $C'$ , симметричную точке  $C$  относительно прямой  $AB$ .

Интересно, что условие

$$\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$$

использовалось не полностью. Мы пользовались только равенством  $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$ .

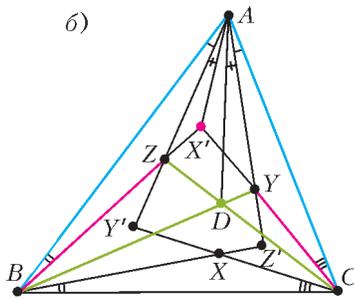
Следующая задача взята из книги А.Акопяна «Геометрия в картинках», поэтому и мы дадим ее почти без текста. В решении будет использовано понятие изогонально сопряженных точек. «Квант» уже писал об этом – например, в статье П.Кожевникова «Иzegoнально сопряженные точки» в №1 за 2016 год.

**Задача 9.** Докажите, что  $AX, BY, CZ$  пересекаются в одной точке (рис.11,а).

**Решение.** Рассмотрим угол  $BAC$ , изогоналы этого угла  $AZ$  и  $AY$ . Пусть  $BY$  пересекает  $CZ$  в точке  $D$  (рис.11,б). По теореме об изогоналях  $AX'$  и  $AD$  – изогоналы угла  $BAC$ . Заметим, что  $X$  и  $X'$  – изогонально сопряженные точки. Следовательно,  $AX'$  и  $AX$  – тоже изогоналы. Значит, прямые  $AX$  и  $AD$  совпали. Прямые  $AX, BY, CZ$  проходят через точку  $D$ .

**Упражнение 8.** Докажите, что в условиях задачи 9 (см. рис.11,б) прямые  $X'Z', XZ, AC$  пересекаются в одной точке.

**Указание.** Рассмотрим угол  $ZAZ'$ . Из задачи 9 мы знаем, что  $AX'$  и  $AX$  – изогоналы этого угла.



Прямые  $X'Z$  и  $Z'X$  пересекаются в точке  $B$ . Тогда прямые  $XZ$  и  $X'Z'$  пересекаются в некоторой точке  $Q$  так, что  $AB$  и  $AQ$  – изогоналы угла  $ZAZ'$ .

(Продолжение следует)

# Московский тур Всероссийской студенческой олимпиады по физике 2017 года

Московский (второй) тур Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов прошел 18 февраля 2017 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) имени Н.Э. Баумана.

В командном зачете первое место заняла команда Московского государственного технического университета имени Н.Э.Баумана, набравшая 213 баллов, второе место заняла команда Российского государственного университета нефти и газа (РГУ) имени И.М.Губкина, набравшая 121 балл, третье место – команда Калужского филиала МГТУ, набравшая 110 баллов.

Победителями в личном зачете стали: Антон Малинский (МГТУ) – первое место, Сергей Бланк (МГТУ) – второе место, Фан Тхань Тай (РГУ) – третье место.

## ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

**1.** Герон Александрийский в первом веке н.э. сформулировал принцип, согласно которому луч света проходит из точки  $A$  в точку  $B$  после отражения от плоского зеркала по самой короткой траектории. При этом оказывается, что угол падения должен равняться углу отражения (этот закон древние греки, правда далеко не все, знали). Рассмотрим механический аналог оптического явления. Пусть на гладкой горизонтальной поверхности, ограниченной с одной стороны прямой стенкой, расположены две точки  $A$  и  $B$ . Из точки  $A$  частица, двигаясь прямолинейно и отскакивая от стенки, попадает в точку  $B$ . Докажите, что из условия минимальности траектории следует закон: угол падения равен углу отражения.

**2.** Через сопло, имеющее форму цилиндрической трубы длиной  $l$ , протекает воздух со скоростью  $v_0$ . В начало сопла помещают маленькое тело массой  $m$  с нулевой начальной скоростью, которое увлекается воздухом и вылетает из сопла со скоростью  $v_k = v_0/2$ .

Определите коэффициент сопротивления  $r$  между телом и воздухом, считая, что сила сопротивления  $F = -r(v_0 - v)^2$ .

**3.** Тело подвешено на двух нитях, закрепленных в двух точках подвеса, расположенных на разных высотах, отличающихся на величину  $h$ . Расстояние между точками подвеса равно  $2h$ . Угол между нитями прямой. Длина нижней нити  $\sqrt{2}h$ . Обе нити находятся в натянутом состоянии. Определите период колебаний такого математического маятника.

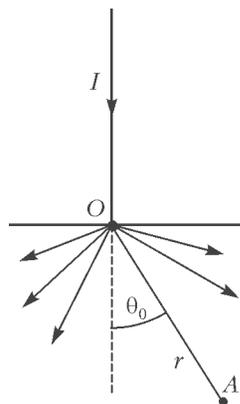
**4.** Один моль газа Ван-дер-Ваальса расширяется по политропе  $(V - b)T = \text{const}$ . Определите изменение энтропии газа, если его температура изменяется от  $T_1$  до  $T_2$ . Теплоемкость  $C_V$  – величина постоянная.

**5.** Прямоугольная диэлектрическая пластинка с соотношением сторон  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  заряжена равномерно по поверхности. Потенциал в центре пластинки равен  $\phi_0$ . Определите потенциал в вершине прямоугольника и в середине большей стороны.

**6.** Ток  $I$  течет по длинному прямому проводу и затем растекается в проводящей среде по закону  $dI \sim \cos \theta \sin \theta \cdot d\theta$ . Пренебрегая влиянием магнитных свойств среды, найдите индукцию магнитного поля в точке  $A$ , отстоящей от точки  $O$  на расстояние  $r$  под углом  $\theta_0$  (см. рисунок).

**7.** Вокруг прямого проводника с током  $I$  вдоль линии магнитного поля радиусом  $r$  движется магнитный диполь с дипольным моментом  $p_m$  со скоростью  $v$ . Определите массу диполя.

**8.** Частично поляризованная электромагнитная волна яв-



ляется суперпозицией двух некогерентных плоскополяризованных волн, интенсивности которых  $I_1$  и  $I_2$ . Угол между плоскостью поляризации частично поляризованной волны и плоскостью поляризации плоскополяризованной волны с интенсивностью  $I_1$  ра-

вен  $\alpha$ . Определите угол между плоскостями поляризации плоскополяризованных волн с интенсивностями  $I_1$  и  $I_2$ .

*Публикацию подготовили В.Глушков,  
В.Голубев, А.Макаров*

## НАША ОБЛОЖКА

### ПУТИ СВЕТА

*(Начало см. на 4-й странице обложки)*

На самом деле сам свет нам виден, но мы не видим, как он распространяется. Образно говоря, мы не можем увидеть свет «со стороны». Но иногда удается и это – благодаря неоднородной среде, которая рассеивает свет. И тогда становится видимым луч света, пробивающийся в темную пыльную комнату сквозь щелочку в плотных шторах. Бывает и намного более величественное зрелище – лучи солнца, спрятавшегося за облаками, пробиваются через них и охватывают полнеба (фото на рисунках 1 и 2).



Рис. 1

Случается, что можно увидеть не один и даже не несколько лучей, а целую стену света. На фотографии, представленной на рисунке 3, ряд фонарей окаймляет эстакаду, возвышающуюся над землей. Идет мелкий-мелкий снег, почти как пыль висящий в воздухе, и свет фонарей рассеивается на нем, создавая яркое светящееся пространство – практически непрерывную стену света. Дорога идет вдали от крупных городов, никаких сильных источников света поблизости



Рис. 2



Рис. 3

нет, небо темное, и контраст между стеной света и окружающей ее темнотой, даже еще лучше видимый глазом, чем на фотографии, создает сказочное ощущение.

Частички пыли, микроскопические капли воды, снежинки – все они рассеивают свет, по сути переотражают его во всевозможных направлениях в стороны от его основного пути, делая этот путь видимым. Так, парадоксальным образом, помехи распространению света позволяют увидеть то, что иначе увидеть было бы невозможно.

*В.Птушенко*

# Олимпиада «Ломоносов-2018». Физика

В 2017/18 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике проводилась в два этапа – отборочный и заключительный.

## ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Отборочный этап олимпиады проходил в форме заочного испытания. На этом этапе каждый ученик 7–11 классов мог участвовать по собственному выбору в одном или двух турах, проводимых по единой форме. Задания каждого из туров были равноценными по сложности и составлялись отдельно для учащихся младших (7–9) и старших (10–11) классов. Эти задания были размещены в личных кабинетах участников на сайте <http://olupr.msu.ru>. Доступ к условиям заданий был открыт для участников дважды: с 13 по 17 ноября 2017 года (первый тур) и с 6 по 10 декабря 2017 года (второй тур). Прием решений и ответов по каждому из туров прекращался одновременно с их завершением.

Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады.

### 7–9 классы

#### Первый тур

1. Длина нерастянутой пружины  $l_0$ , а коэффициент упругости  $k$ . К пружине подвесили груз массой  $m$ . Найдите длину  $l$  пружины после того, как груз займет положение равновесия. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

2. По гладкой горизонтальной поверхности скользят вдоль одной прямой навстречу друг другу массивный брусок со скоростью  $u$  и небольшая легкая шайба со скоростью  $v$  (рис.1). В момент времени  $t = 0$  шайба оказалась в некоторой точке  $A$ , расстояние от которой до передней грани бруска в этот

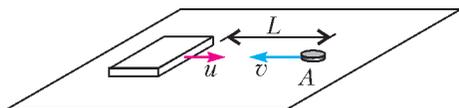


Рис. 1

момент было равно  $L$ . Через какое время  $\tau$  после этого шайба снова окажется в точке  $A$ , испытав абсолютно упругое столкновение с бруском? Считайте, что скорость шайбы перпендикулярна передней грани бруска, а масса шайбы пренебрежимо мала по сравнению с массой бруска.

3. В калориметре находится смесь воды и льда в состоянии термодинамического равновесия. Через время  $\tau_1$  после включения спирали, подсоединенной к источнику постоянного напряжения, весь лед растаял, а еще через время  $\tau_2$  вода нагрелась на  $\Delta t$  градусов. Пренебрегая теплоемкостью калориметра, определите, каково было отношение  $n$  массы воды  $m_v$  к массе льда  $m_l$  в момент включения спирали. Удельная теплоемкость воды  $c$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda$ .

4. Резистор сопротивления  $R_1$  подключен к реостату с сопротивлением  $R$  и длиной  $L$  (рис.2). Найдите сопротивление  $R_{AB}$  цепи между точками  $A$  и  $B$ , если движок реостата находится на расстоянии  $x$  от его левого конца.

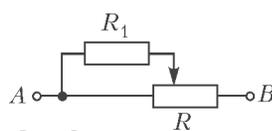


Рис. 2

5. Высота Солнца над горизонтом составляет угол  $\alpha$ . Под каким углом  $\beta$  к горизонту следует расположить плоское зеркало для того, чтобы осветить солнечными лучами дно наклонной штольни, образующей угол  $60^\circ$  с горизонтом (рис.3)?

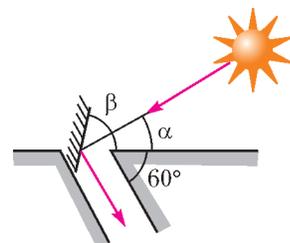


Рис. 3

#### Второй тур

1. Какое давление  $p$  оказывает на снег мальчик массой  $m$ , стоя на сноуборде площадью  $S$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

2. Гирию медленно поднимают на высоту  $h$

с помощью привязанного к ней упругого шнура, который в исходном положении не растянут. При этом совершается работа  $A$ . Коэффициент упругости шнура  $k$ . Какова масса гири  $m$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**3.** Горные туристы в походе вскипятили воду для чая, используя влажный снег, т.е. смесь кристалликов льда и воды при  $0^\circ\text{C}$ . В котелок они набрали снег массой  $m$ . При этом туристы решили провести эксперимент и следили за температурой содержимого котелка с того момента, как повесили его над костром. Сначала температура смеси не менялась в течение времени  $\tau_1$ , а затем вода дошла до кипения при температуре  $t_k$  за время  $\tau_2$ . По результатам измерений туристам удалось рассчитать исходную массу воды  $m_b$  в смеси. Какой ответ получили туристы, считая, что количество теплоты, передаваемое содержимому котелка в единицу времени, не менялось в течение всего процесса? Удельная теплота плавления льда  $\lambda$ , удельная теплоемкость воды  $c$ . Теплоемкостью котелка можно пренебречь.

**4.** Два резистора сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  соединены параллельно и включены в цепь постоянного тока (рис.4). Какая мощность  $P$  выделяется на участке между точками  $A$  и  $B$ , если идеальный амперметр, включенный последовательно с резистором сопротивлением  $R_2$ , показывает силу тока  $I_2$ ?

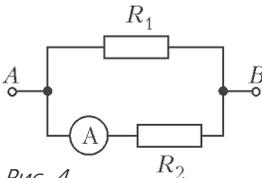


Рис. 4

**5.** Объектив фотоаппарата установлен на съемку объектов, удаленных на бесконечно большое расстояние. Определите, какой диаметр  $d$  будет иметь на фотопленке изображение точечного источника света, который находится на расстоянии  $a$  от фотоаппарата. Объектив фотоаппарата считайте тонкой линзой с фокусным расстоянием  $F$ . Отношение диаметра объектива к его фокусному расстоянию равно  $k$ .

### 10–11 классы

#### Первый тур

**1.** Груз массой  $m$ , подвешенный на пружине, совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой  $A$  и периодом  $T$ .

Определите силу натяжения пружины  $F$  в тот момент, когда груз достигает самой нижней точки. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**2.** На горизонтальном столе покоится клин массой  $M$  (рис.5). Сверху на клин падает шарик массой  $m$ . Определите угол  $\alpha$  при основании клина, если известно, что после упругого удара о клин шарик отскочил по горизонтали, а клин начал двигаться поступательно. Трением между всеми поверхностями можно пренебречь.

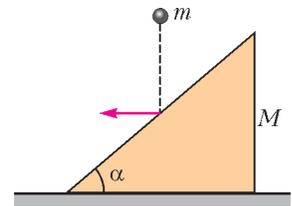


Рис. 5

**3.** В тепловом двигателе, рабочим телом которого являются  $\nu$  молей идеального одноатомного газа, совершается циклический процесс,  $pV$ -диаграмма которого изображена на рисунке 6. Работа газа за один цикл равна  $A$ , температуры газа в состояниях 1 и 3 равны  $T_1$  и  $T_3$  соответственно. Найдите коэффициент полезного действия цикла  $\eta$ . Универсальная газовая постоянная равна  $R$ .

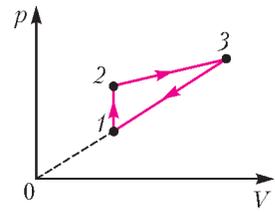


Рис. 6

**4.** Плоский конденсатор включен последовательно в цепь, состоящую из резистора сопротивлением  $R$  и источника с ЭДС  $\mathcal{E}$  (рис.7). В пространство между пластинами конденсатора параллельно им вдвигают с постоянной скоростью  $v$  металлическую пластинку толщиной  $d$ . Поперечные размеры вдвигаемой пластинки  $l \times l$  совпадают с размерами обкладок конденсатора, а расстояние между обкладками равно  $d_0$ . Пренебрегая внутренним сопротивлением источника, найдите силу тока  $I$  в цепи. Электрическая постоянная равна  $\epsilon_0$ .

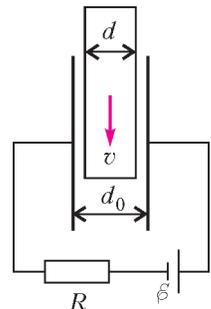


Рис. 7

**5.** Точечный источник света лежит на главной оптической оси тонкой собирающей лин-

зы с фокусным расстоянием  $F$ . Расстояние от источника до центра линзы равно  $2F$ . На какое расстояние  $x$  сместится изображение источника, если линзу повернуть на угол  $\alpha$  так, чтобы центр линзы остался неподвижным?

**Второй тур**

1. Концы невесомой пружины закрепили в двух точках, лежащих на одной горизонтали так, что расстояние между этими точками равно длине свободной пружины  $l_0$  (рис.8).

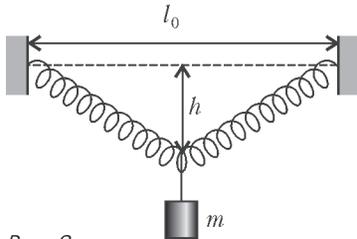


Рис. 8

Затем к середине пружины подвесили грузик массой  $m$ . После установления равновесия точка подвеса грузика оказалась ниже своего исходного положения на величину  $h$ . Найдите коэффициент упругости пружины  $k$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ .

2. Граната брошена от поверхности земли под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$ . В верхней точке траектории граната разрывается на два одинаковых осколка, скорости которых сразу после взрыва направлены горизонтально. На каком расстоянии  $l$  друг от друга упадут осколки, если кинетическая энергия, сообщенная им при взрыве, равна  $E$ , а масса гранаты  $m$ ? Сопротивлением воздуха можно пренебречь, ускорение свободного падения равно  $g$ .

3. Над одноатомным идеальным газом, взятым в количестве  $\nu$  молей, осуществляется циклический процесс. При этом внутренняя энергия газа

$U$  меняется так, как показано на рисунке 9. Разность максимальной и минимальной температур в цикле равна  $\Delta T$ . Какую работу  $A$  газ совершает за

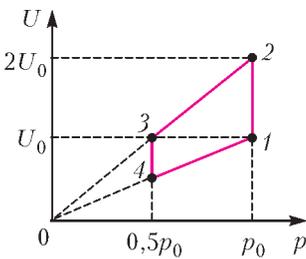


Рис. 9

один цикл процесса? Универсальная газовая постоянная равна  $R$ .

4. В однородном магнитном поле, индукция которого равна  $B$  и направлена вертикально, на двух невесомых гибких проводниках длиной  $l$  каждый подвешен горизонтально металлический стержень массой  $m$  и длиной  $L$  (рис.10). По стержню пропускают кратковременный прямоугольный импульс постоянного тока силой

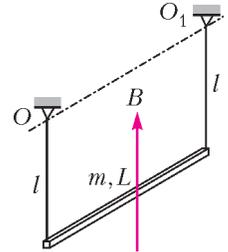


Рис. 10

$I_0$ . При каком минимальном значении  $\tau$  длительности импульса тока стержень совершит полный оборот, двигаясь по окружности вокруг оси  $OO_1$ , проходящей через точки подвеса гибких проводников? Считайте, что смещение стержня за время  $\tau$  пренебрежимо мало. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

5. В тонкой рассеивающей линзе получено изображение точечного источника, расположенного на расстоянии  $h$  от главной оптической оси линзы. Оказалось, что изображение находится на расстоянии  $h_1$  от главной оптической оси линзы, а расстояние от источника до изображения равно  $l$ . Определите модуль  $D$  оптической силы этой линзы.

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

Проведение заключительного этапа олимпиады было назначено на 22 февраля 2018 года. Для учащихся всех классов этот этап проводился в очной форме на физическом факультете МГУ и на трех региональных площадках в городах Белгород, Кострома и Тюмень. Задание для учащихся 7–8, а также 9 классов состояло из четырех задач по темам, изучаемым в рамках программы по физике для основной общеобразовательной школы. Задания для учащихся 10–11 классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором ЕГЭ 2018 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание включало каждый из этих разделов и состояло из кратких вопросов по теории и дополняющих их задач.

## 7–8 классы

1. Металлический брусок массой  $m = 800$  г имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Если класть брусок на горизонтальную поверхность поочередно тремя разными гранями, то он будет оказывать на нее давления

$p_1 = 1,6$  кПа,  $p_2 = 5p_1$  и  $p_3 = \frac{p_2}{2}$  соответственно. Определите плотность  $\rho$  материала бруска. Ответ выразите в  $\text{г}/\text{см}^3$ . Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$ .

2. Школьник решил приготовить чай. Он налил в чайник некоторое количество воды, поставил его на электрическую плитку и стал наблюдать за процессом нагрева воды. Школьник обнаружил, что за время  $t_1 = 1$  мин температура воды повысилась на  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ . Решив продолжить наблюдения, он снял чайник с плитки, после чего температура воды в чайнике за время  $t_2 = 0,5$  мин понизилась на ту же величину  $\Delta T$ . Какова масса  $m$  воды в чайнике, если тепловая мощность, идущая на нагрев воды при работающей плитке, равна  $W = 500$  Вт? Считайте, что тепловые потери воды за счет рассеяния энергии в окружающую среду пропорциональны времени, а теплоемкость чайника пренебрежимо мала. Удельная теплоемкость воды  $c = 4,2 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot ^\circ\text{C})$ .

3. Схема электрической цепи, состоящей из двух одинаковых ламп и двух резисторов, изображена на рисунке 11. Между точками  $A$  и  $B$  поддерживается постоянное напряжение. Сопротивление каждого резистора равно  $R = 3$  Ом. Известно, что если в этой цепи вместо одной из

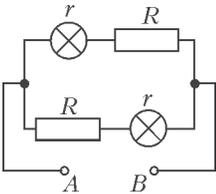


Рис. 11

ламп подключить резистор сопротивлением  $R$ , то мощность, выделяемая во всей цепи, увеличится в  $k = 2$  раза. Найдите сопротивление лампы  $r$ .

4. На лабораторном штативе закреплены две лазерные указки, одна из них на высоте  $h_1 = 25$  см, а вторая на высоте  $h_2 = 37$  см от уровня стола. Лучи света от указок направлены на маленькое плоское зеркало, лежащее плашмя на столе на расстоянии  $l = 60$  см от стены. Найдите рас-

стояние  $d$  между двумя световыми пятнами, образованными светом от лазерных указок на стене, если расстояние от штатива до стены  $L = 1$  м. Считайте, что лазерные указки и зеркало расположены в одной вертикальной плоскости, перпендикулярной стене.

## 9 класс

1. Маленький шарик бросают от поверхности земли под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. В точке падения шарика, находящейся на одном уровне с точкой бросания, установлена тяжелая гладкая пластинка. Под каким углом  $\beta$  к горизонту нужно расположить эту пластинку, чтобы после абсолютно упругого соударения с ней шарик вернулся в точку бросания?

2. В калориметре находится кусок льда при температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . В калориметр доливают воду массой  $m = 10$  кг, взятую при температуре  $t_1 = 9,9^\circ\text{C}$ . Чтобы удержать кусок льда под водой сразу после добавления в калориметр воды, к нему требуется приложить направленную вертикально вниз силу  $F_1 = 3$  Н. Какую силу  $F_2$ , направленную вертикально вниз, необходимо приложить к куску льда для его удержания под водой после установления теплового равновесия в калориметре? Теплообменом с калориметром и окружающими телами можно пренебречь. Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 0,33 \text{ МДж}/\text{кг}$ , удельная теплоемкость воды  $c_v = 4,2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ , плотность воды  $\rho_v = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , плотность льда  $\rho_l = 0,9 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$ .

3. В электрической цепи, схема которой показана на рисунке 12, между точками  $A$  и

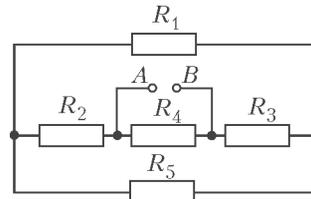


Рис. 12

$B$  поддерживают постоянное напряжение  $U = 10$  В. Сопротивления резисторов равны, соответственно,  $R_1 = R_5 = 20$  Ом,  $R_2 = R_4 = 10$  Ом,  $R_3 = 5$  Ом. Определите

мощность  $P$ , выделяющуюся на резисторе сопротивлением  $R_1$ .

4. На расстоянии  $a = 20$  см от собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F_1 = 10$  см на ее главной оптической оси находится точечный источник света. По другую сторону линзы на расстоянии  $l = 10$  см расположена рассеивающая линза, причем главные оптические оси обеих линз совпадают (рис.13). Определите модуль фокусного

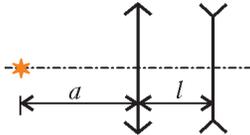


Рис. 13

расстояния рассеивающей линзы  $F_2$ , если известно, что из нее выходит параллельный пучок света.

10–11 классы

1. Дайте определение механической работы. Чему равна кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек?

**Задача.** На шероховатом горизонтальном столе находится брусок массой  $M = 500$  г с прикрепленной к нему легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый неподвижный блок, причем отрезок нити от бруска до блока горизонтален (рис.14). Ко второму

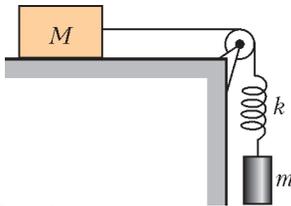


Рис. 14

концу нити привязана легкая пружина жесткостью  $k = 10$  Н/м с подвешенным на ней грузом массой  $m = 100$  г. В начальном состоянии груз удерживают в таком положении, что нить слегка натянута, а пружина не деформирована, причем правый конец нити и пружина занимают вертикальное положение. В некоторый момент груз отпускают из состояния покоя. Спустя время  $\tau = \pi/30$  с  $\approx 0,105$  с после этого брусок сдвигается с места. Найдите коэффициент трения  $\mu$  между бруском и столом.

2. Дайте определение идеального газа. Запишите уравнение состояния идеального газа, указав смысл входящих в это уравнение величин.

**Задача.** Над одноатомным идеальным газом совершают процесс, в котором давление газа линейно уменьшается с ростом его объема. При этом отношение конечного объема газа к начальному  $\frac{V_2}{V_1} = m = 4$ , а отношение конечного давления к начальному  $\frac{p_2}{p_1} = n = \frac{1}{2}$ . Найдите, во сколько раз  $k$  количество теплоты, полученное газом в этом процессе, больше изменения его внутренней энергии.

3. Что такое электродвижущая сила (ЭДС) источника? Сформулируйте закон Ома для замкнутой цепи.

**Задача.** На двух длинных параллельных рельсах, расположенных на горизонтальной поверхности на расстоянии  $l = 1$  м друг от друга, лежит перпендикулярно рельсам проводящий стержень массой  $m = 0,5$  кг. Коэффициент трения между стержнем и рельсами  $\mu = 0,1$ . Вся система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен вертикально и по модулю равен  $B = 0,1$  Тл. Рельсы подключают к источнику с ЭДС  $\mathcal{E} = 10,1$  В, в результате чего стержень приходит в движение. Пренебрегая сопротивлением рельсов и внутренним сопротивлением источника, а также считая сопротивление отрезка стержня между точками его контакта с рельсами равным  $R = 2$  Ом, найдите, с какой установившейся скоростью  $v_0$  будет двигаться стержень. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

4. Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

**Задача.** Светящаяся точка  $S$  приближается к собирающей линзе и пересекает ее главную оптическую ось на расстоянии  $d = 30$  см от линзы. В этот момент скорость точки составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с осью линзы. Найдите угол  $\beta$  между скоростью изображения  $S'$  точки  $S$  и главной оптической осью линзы в тот же момент времени. Фокусное расстояние линзы  $F = 20$  см.

Публикацию подготовил С.Чесноков

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

1. На рисунке 1 показаны два варианта расположения мух и комаров.

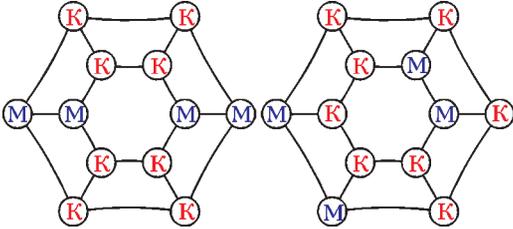


Рис. 1

*Комментарий.* Перебором можно убедиться, что возможны только приведенные примеры (с точностью до поворотов паутины). Интересно, что можно, не опираясь на рисунок, показать, что комаров всегда 8. В самом деле, насекомых 12, у каждого по два соседа-комара, т.е. комаров 24. Но каждого комара мы посчитали трижды, так как он для трех насекомых является соседом. Значит, комаров на самом деле  $24 : 3 = 8$ . А мух тогда 4.

2. Если посмотреть на пятое и шестое числа, видно, что  $M < \dot{Y}$ , а если на второе и третье — что  $\dot{Y} < X$ . Значит,  $M < X$ . Но самое маленькое число начинается с  $X$ , самое большое — с  $M$ , так что  $M > X$ . Значит, Незнайка ошибся.

3. *Первое решение.* У равнобедренного треугольника есть ось симметрии. При симметрии относительно этой оси  $K$  переходит в  $C$ , а  $D$  переходит в  $A$  (рис.2,а). Значит,  $AC$  образует

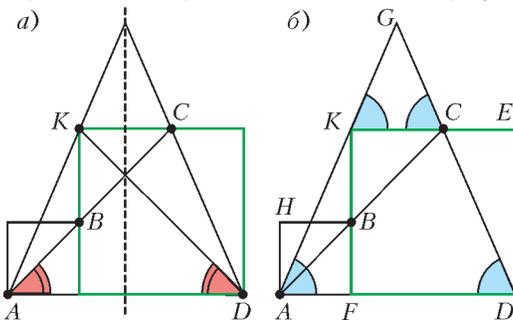


Рис. 2

тот же угол с основанием, что и диагональ квадрата  $KD$ , т.е.  $45^\circ$ . Но  $AB$  тоже образует с основанием угол  $45^\circ$ , как диагональ меньшего квадрата. Значит, точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  действительно лежат на одной прямой.

*Второе решение* (без использования симметрии). Введем обозначения так, как показано на рисун-

ке 2,б, и проведем отрезки  $AB$  и  $BC$ . Так как  $\angle ABH = 45^\circ$ , достаточно доказать, что  $\angle KBC = \angle BCK = 45^\circ$  (тогда  $\angle ABH + \angle HBK + \angle KBC = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ , что равносильно утверждению задачи).

Используя равенство соответственных углов при параллельных прямых и равнобедренность треугольника  $AGD$ , получим  $\angle GKC = \angle GAD = \angle GDA = \angle GCK$ . Следовательно,  $GK = GC$ , поэтому  $AK = CD$ . Значит, равны прямоугольные треугольники  $AKF$  и  $CDE$  (по гипотенузе и катету). Следовательно,  $CE = AF = BF$ , тогда  $BK = CK$ , откуда  $\angle KBC = \angle BCK = 45^\circ$ , что и требовалось.

4. После того как один рыбак раздаст своих рыб, у остальных должно стать по  $100:5 = 20$  рыб. Значит, каждый поймал не более 20 рыб. Пусть у рыбака Ивана ровно 20 рыб. Когда другой математик раздает своих рыб, Иван не получает ничего, но у всех становится поровну. Поэтому если Иван уйдет, остальные могут раздавать по-прежнему, и у всех снова будет по 20. Осталось показать, что среди рыбаков действительно найдется такой, который поймал ровно 20 рыб. В самом деле, если такого нет, то у рыбаков в сумме не более чем  $19 + 18 + 17 + 16 + \dots + 15 + 14 = 99 < 100$  рыб — противоречие.

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №2)

21.  $\frac{1}{2}$ .

Докажем, что если дробь  $\frac{a}{b}$  есть в нашем ряду, то и дробь  $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$  тоже есть. В самом деле, она положительна и меньше 1. Она и несократима: если бы  $b-a$  и  $b$  имели общий делитель, то их разность  $b - (b-a) = a$  тоже имела бы этот делитель и дробь  $\frac{a}{b}$  была бы сократимой. Значит, выписанные дроби можно разбить на пары  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{b-a}{b}$  с суммой 1 и одна дробь останется без пары — это  $\frac{1}{2}$  (лишь она парна самой себе).

Тогда если всего дробей  $k$ , то их сумма равна  $\frac{k}{2}$ , а среднее арифметическое равно  $\frac{1}{2}$ .

22. Назовем исходный треугольник  $ABC$ , а середины его сторон —  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  (рис.3). Рассмотрим точку  $O$  пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Она будет

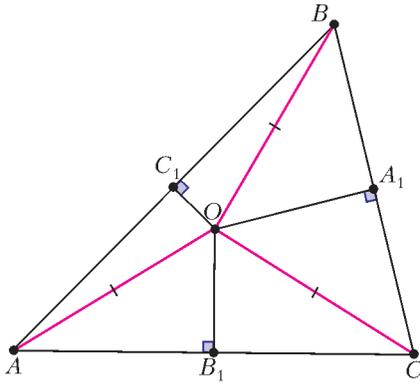


Рис. 3

находиться внутри треугольника, так как он остроугольный.

а) Отрезки, соединяющие  $O$  с вершинами и с серединами сторон, разбивают треугольник на 6 прямоугольных треугольников. Их гипотенузы равны, поскольку  $O$  равноудалена от вершин. А диаметр описанной окружности прямоугольного треугольника – это его гипотенуза (так как если хорда видна из точки на окружности под прямым углом, то она является диаметром). Значит, такое разбиение на треугольники подходит под условие задачи.

б) Отложим в одном и том же направлении (например, против часовой стрелки) равные углы  $\angle A_1OA_2 = \angle B_1OB_2 = \angle C_1OC_2$ , точки  $A_2, B_2, C_2$  отметим на соответствующих сторонах (рис.4).

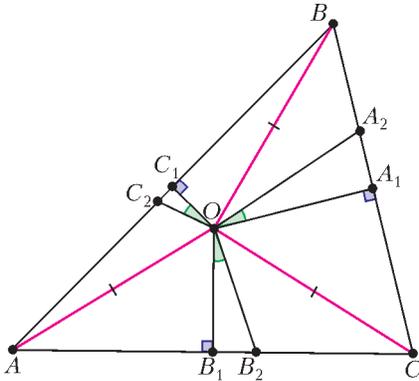


Рис. 4

Это можно сделать бесконечным количеством способов.

Тогда  $\angle AC_2O = \angle BA_2O = \angle CB_2O = \alpha$  (рис.5). Значит, четырехугольники  $AB_2OC_2, BC_2OA_2$  и  $CA_2OB_2$  вписанные. В каждом из них угол величины  $\alpha$  опирается на отрезок длины  $R$ , где  $R = AO = BO = CO$ . Геометрическое место точек, из которых отрезок виден под данным углом, – дуги окружности. Значит, окружности, описан-

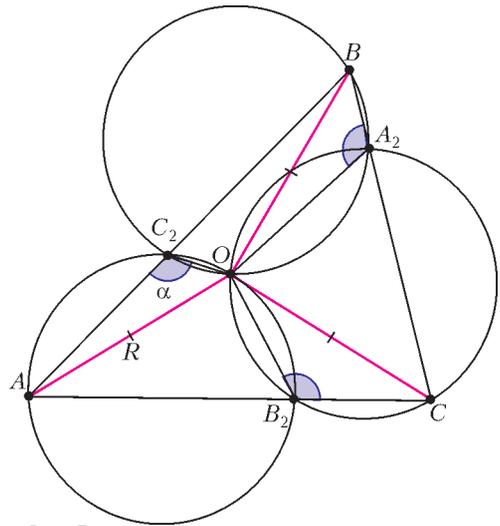


Рис. 5

ные около этих четырехугольников, равны (из теоремы синусов следует, что диаметры этих окружностей равны  $\frac{R}{\sin \alpha}$ ). Разрезав каждый из этих четырехугольников на два треугольника, получим 6 треугольников с одинаковыми радиусами описанных окружностей.

**23.** Верна только вторая теорема.

Первая теорема неверна: сумма двух треугольных чисел 15 и 1 равна 16, т.е. степени двойки, но их разность, 14, не степень двойки.

Пусть одно из двух треугольных чисел  $1 + \dots + n$ , а второе  $1 + \dots + m$  (где  $n > m$ ), и разность  $S$  этих треугольных чисел является степенью двойки. Тогда

$$2S = 2((m+1) + \dots + n) = (n-m)(m+n+1).$$

Число  $2S$  – степень двойки, значит, оба множителя – тоже степени двойки. Но значения в скобках – числа разной четности, поэтому одно из них равно 1. При этом  $m+n+1 > 1$ , следовательно,  $n-m=1$ . Тогда  $S = n$  и  $n = 2^k$  для некоторого натурального  $k$ . Значит, сумма этих двух треугольных чисел равна

$$(1 + \dots + n) + (1 + \dots + (n-1)) = n^2 = (2^k)^2 = 2^{2k}$$

– тоже степень двойки.

**24.** 9.

Отметим на поле 9 узлов так, как показано на рисунке 6,а. Заметим, что как бы ни был расположен трехпалубный корабль, на его границе будет находиться ровно один из отмеченных узлов. Поскольку по условию задачи корабли не могут иметь общих точек, то количество кораблей, которые можно разместить на поле, не превосходит количества отмеченных узлов, т.е. не превосходит 9. В то же время девять кораблей

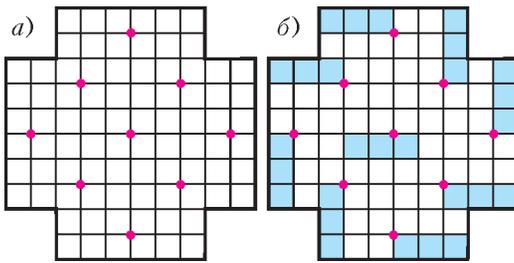


Рис. 6

разместить на поле можно (рис.6,б). Итак, нами доказано, что наибольшее количество трехпалубных кораблей, которые можно разместить на поле, равно 9.

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

### ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Путешественник придет (по спирали) на Северный полюс.
2. Из точек, расположенных на параллели, отстоящей на 5 км к югу от экватора.
3. Такие путешествия доказывают лишь замкнутость земной поверхности; примером подобной может быть и поверхность цилиндра.
4. Для измерения широты достаточно посмотреть на высоту Полярной звезды над горизонтом. А определение долготы равносильно синхронизации часов с местом отправления, что требует точных хронометров, изобретенных позже первых кругосветных путешествий.
5. Корабельный календарь отстал на один день. Обогнув Землю с востока на запад, моряки совершили на один суточный оборот меньше, чем неподвижный порт, откуда они vyplыли и куда вернулись.
6. Земная тень на Луне во время лунного затмения имеет форму круга – такая тень бывает только от шара.
7. Вследствие вращения Земля сплюснута, ее полярный радиус короче экваториального. Поэтому самые близкие к центру Земли точки – это полюса планеты, а из людей – участники походов на подводных лодках в Арктике.
8. Нет, так как потерю в весе можно отнести на счет сплюснутости Земли, а отклонение отвеса может быть вызвано неравномерностью распределения масс внутри планеты.
9. На полюсе в течение суток высота Солнца над горизонтом почти не меняется. Поэтому тень от чего-либо в течение суток «ходит по кругу», оставаясь все время одной длины.
10. Хотя для наблюдателя на экваторе траектория Солнца меняется в зависимости от времени

года, оно всегда проводит над горизонтом половину суток.

**11.** Будет, так как орбитальное движение Земли приводит к кажущемуся обращению Солнца вокруг нее с периодом в один год.

**12.** Тепловое действие лучей тем значительнее, чем круче они падают на поверхность вертикально расположенных тел, а именно так в полярных странах идут лучи от невысоко поднимающегося над горизонтом Солнца.

**13.** Несколько тысячелетий назад в районе Северного полюса мира не было яркой звезды. Ориентация в ночное время проводилась по суточному вращению неба, которое надежнее указывает направление «восток-запад», чем «север-юг».

**14.** Смотря для чего. Для навигации в открытом море и для астрономических наблюдений невооруженным глазом удобнее система Птолемея; для запуска спутников – несомненно, система Коперника.

**15.** Вблизи полюса мала горизонтальная составляющая земного магнитного поля и потому мал вращающий момент, действующий на магнитную стрелку.

**16.** Магнитное поле Земли практически однородно и создает только вращающий момент, действующий на стрелку, в то время как неоднородное поле постоянного магнита помимо вращения вызывает и поступательное движение стрелки.

### МИКРООПЫТ

Если вы аккуратно провели измерения и расчеты, то расстояние «по карте» должно быть больше расстояния «по глобусу», они совпадут, лишь если пути между точками пройдут по экватору или по меридиану.

### ГДЕ ОШИБКА?

В каждом из предложенных текстов есть ошибки.

1. Чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует. Действительно, если  $a - b = 1$ , то  $a^2 - b^2 = a + b = 119 = 7 \cdot 17$ , т.е. 119 – составное число. Таким образом, в приведенном решении получено необходимое условие ( $a = 60$ ,  $b = 59$ ), но проверка показывает, что оно не является достаточным. Это можно в равной степени трактовать либо как некорректность условия (сумма чисел должна быть простым числом), либо как ошибку в решении и ответе (после разложения на множители разности квадратов можно сразу сделать вывод, что искомым чисел не существует).
2. Число 10, конечно, не учтено, так как в перечне простых чисел, меньших 40, пропущено

число 2. Кроме того, есть и еще одна ошибка. Число, которое имеет ровно четыре делителя, представимо либо в виде  $p \cdot q$ , либо в виде  $p^3$  (где  $p$  и  $q$  – различные простые числа). Последний случай в решении упущен и тем самым потеряно число  $5^3 = 125$ . Таким образом, верный ответ: 12.

**3.** Первое решение содержит неверное утверждение: «Увидим, что как бы мы ни разбивали 197 на два целых числа, сумма цифр этих чисел всегда будет равняться 17». Например, для разложения  $197 = 79 + 118$  это утверждение неверно.

Во втором решении допущена ошибка при составлении системы, так как  $z + b$  может равняться не только 7, но и 17. Во втором случае  $y + a = 8$  и противоречия с четностью не возникает.

Таким образом, оба решения неверны. Неверен также и полученный ответ. Например, в равенствах  $197 = 49 + 148$  и  $197 = 58 + 139$  слагаемые имеют одинаковые суммы цифр.

Отметим, что полученный ответ станет верным, если, например, в условии заменить число 197 на число 199.

**4.** Числа, указанные в условии, существуют, например  $a = b = 2$  или  $a = 220$ ,  $b = 180$ . Утверждение задачи также выполняется, но приведенное решение содержит ошибку. Числа  $a + b$  и  $2a - 2b + 1$  не обязательно являются взаимно простыми. Например, при  $a = 2$ ,  $b = 1$  каждое из этих выражений принимает значение 3, т.е. их наибольший общий делитель – это 3.

Приведем одно из возможных верных решений. Пусть  $a + b = c$ , тогда  $b = c - a$ . Подставим это значение  $b$  в заданное соотношение и преобразуем:

$$2a^2 + a = 3(c - a)^2 - c + a \Leftrightarrow a^2 - 6ca + (3c^2 - c) = 0.$$

Рассматривая полученное уравнение как квадратное относительно  $a$ , получим

$$\frac{D}{4} = 9c^2 - 3c^2 + c = c(6c + 1).$$

Это число должно быть точным квадратом. Так как числа  $c$  и  $6c + 1$  взаимно просты, то каждое из них является точным квадратом, т.е.  $c = a + b$  – точный квадрат.

**5.** И ответ, и решение неверны. Один из примеров прогрессии, удовлетворяющей условию задачи: (16; 24; 36; 54; 81). Несложно проверить, что  $16 + 24 + 36 + 54 + 81 = 211$ .

Основная ошибка в приведенном решении: ниоткуда не следует, что знаменатель прогрессии должен быть натуральным числом (в приведенном примере  $q = 1,5$ ).

Кроме того, в решении есть еще две ошибки.

1) Не рассмотрен случай, когда  $q = 1$ . Тогда искомая прогрессия – постоянная последовательность, у которой каждый из 211 членов равен 1.

2) В последнем случае, рассмотренном в «решении» ( $q \geq 6$ ), не возникнет противоречия, если  $n = 3$ , так как тогда в указанной сумме нет слагаемого  $q^2$ , значит, нет и противоречия. Пример прогрессии, удовлетворяющей условию: (1; 14; 196).

**6.** Приведенное доказательство действительно похоже на классическое, но кое-что в нем упущено. Это рассуждение заведомо не может быть верным, так как число 5 в нем вообще никак не используется.

Ошибка содержится в последнем утверждении, так как противоречия, на самом деле, нет: если  $n$  делится на  $k$ , то дробь  $\frac{n}{k}$  вполне может быть несократимой, а именно, если  $k = 1$ .

По сути, доказано более слабое утверждение: число  $\sqrt{5}$  (и вообще, число  $\sqrt{a}$  при натуральном значении  $a$ ) либо целое, либо иррациональное. Тогда приведенные рассуждения можно завершить, доказав, что  $\sqrt{5}$  – не целое число. Для этого достаточно проверить, что  $\sqrt{5} \neq 1$  и  $\sqrt{5} \neq 2$ , и указать, что при всех натуральных  $k \geq 3$  выполняется неравенство  $k^2 \geq 9 > 5$ .

**7.** В приведенном решении есть две ошибки. Во-первых, как сказано в статье, при подсчете линий, соединяющих степени двойки со степенями тройки, дважды учтена линия, соединяющая  $2^0 = 1$  и  $3^0 = 1$ , а каждый делитель исходного числа выписывался ровно один раз. Во-вторых (и это основная ошибка!), при подсчете «лишних» линий забыты те, которые соединяют единицу с числами, делящимися и на 2 и на 3 (по условию задачи, такие линии не были проведены, поэтому их также нужно учесть).

Подсчитаем действительное количество «лишних» линий в таком решении. Чисел, делящихся и на 2 и на 3, будет  $8 \cdot 10 = 80$  (двойка может входить в любой степени от 1 до 8, а тройка – в любой степени от 1 до 10). Следовательно, «лишних» линий, на самом деле,  $98 + 80 = 178$ . Таким образом, Петя нарисовал  $\frac{99 \cdot 98}{2} - 178 = 4673$  линии.

Возможен и другой ход рассуждений. Нарисуем круги Эйлера. В первый круг поместим все те из выписанных чисел, которые делятся на 2, а во второй – все числа, делящиеся на 3. Тогда всего в первом круге  $8 \cdot 11 = 88$  чисел, во втором круге  $9 \cdot 10 = 90$  чисел, а в пересечении этих кругов  $8 \cdot 10 = 80$  чисел. Любые два числа в первом круге соединены линией – итого в нем  $\frac{88 \cdot 87}{2}$

линий. И любые два числа во втором круге соединены линией – итого в нем  $\frac{90 \cdot 89}{2}$  линий.

Линии, которые находятся в пересечении этих кругов, мы учли дважды. Таковых будет  $\frac{80 \cdot 79}{2}$ .

Поэтому всего Петя провел  $44 \cdot 87 + 45 \cdot 89 - 40 \cdot 79 = 4673$  линии.

**8.** Приведенный ответ верный, а в решении есть ошибка. Использовано неверное утверждение: «если НОД нескольких чисел равен 1, то НОК этих чисел равно их произведению». Действительно, рассмотрим, например, числа 2, 3 и 4:  $\text{НОД}(2; 3; 4) = 1$ ,  $\text{НОК}(2; 3; 4) = 12 \neq 2 \cdot 3 \cdot 4$ . Отметим, что аналогичное утверждение будет верным только в случае, если рассматривать *парно* взаимно простые числа.

Приведем один возможных верных способов решения.

Предположим, что стороны  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  данного четырехугольника различны. Без ограничения общности можно считать, что  $a < b < c < d$ . Обозначим  $a + b + c + d = P$ . Тогда  $d < a + b + c < 3d$ . Так как  $a + b + c$  делится на  $d$ , то  $a + b + c = 2d$ , т.е.  $P = 3d$ . Заметим, что если сумма длин трех сторон делится на длину четвертой стороны, то и периметр  $P$  четырехугольника делится на эту длину. Тогда

$$3 = \frac{P}{d} < \frac{P}{c} < \frac{P}{b} < \frac{P}{a}, \text{ т.е. } \frac{P}{c} \geq 4, \frac{P}{b} \geq 5, \frac{P}{a} \geq 6.$$

$$\text{Таким образом, } a \leq \frac{P}{6}, b \leq \frac{P}{5}, c \leq \frac{P}{4}, d \leq \frac{P}{3},$$

$$\text{поэтому } a + b + c + d \leq \frac{P}{6} + \frac{P}{5} + \frac{P}{4} + \frac{P}{3} = \frac{19P}{20} - \text{противоречие, так как } a + b + c + d = P.$$

Следовательно, наше предположение неверно, и у исходного четырехугольника найдутся равные стороны.

**9.** Условие «в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия» относится ко всем вместе взятым ящикам с первого склада. При умножении 50 на 3 оно применяется к пятидесяти перевезенным ящикам. Но если бы в пятидесяти перевезенных ящиках среднее число бракованных изделий было таким же, как и на всем складе, то и в оставшихся ящиках оно бы тоже не изменилось. А по условию задачи оно уменьшилось. Поэтому в перевезенных пятидесяти ящиках было в среднем более чем по 3 бракованных изделия.

Приведем верное решение. Пусть вначале на первом складе было  $x$  ящиков, а на втором –  $y$  ящиков. Тогда на первом складе  $3x$  бракованных изделий, а на втором –  $6y$ . После перевозки на первом складе бракованных изделий стало

$2(x - 50)$ , а на втором  $5(y + 50)$ . Так как суммарное количество бракованных изделий на двух складах не изменилось, то  $3x + 6y = 2(x - 50) + 5(y + 50)$ . Из этого уравнения следует, что  $x + y = 150$ .

Отметим, что по данным задачи нельзя найти количество ящиков на каждом складе, а можно только найти общее количество ящиков на двух складах, которое действительно равно 150, т.е. получен верный ответ при неверном решении.

**10.** Приведенное решение в корне неверно (ответ при этом указан верный). Из верного утверждения «У первого торговца мякоть составляет  $\frac{2}{3}$  массы» вовсе не следует, что  $\frac{2}{3}$  килограмма мякоти у него стоит 100 рублей. На самом деле первый торговец берет 100 рублей не за  $\frac{2}{3}$  килограмма мякоти слив, а за  $\frac{2}{3}$  килограмма слив вместе с косточками. А 150 рублей он, как и сказано в условии, берет за 1 кг слив, а не за 1 кг мякоти. Аналогично, второй торговец берет 50 рублей за полкило слив (а не только мякоти), а 100 рублей – за 1 кг слив.

Вот верное решение. Сравним цену мякоти слив. Первый торговец продает  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$  килограмма мякоти за 150 рублей, т.е. цена 1 кг мякоти у него составляет  $150 : \frac{2}{3} = 225$  (р.). А у второго торговца мякоть стоит 100 рублей за полкило, т.е. 200 рублей за килограмм. Таким образом, килограмм мякоти у второго торговца дешевле, поэтому покупать сливы выгоднее у него.

Можно рассуждать и по-другому: на 300 рублей у первого торговца будет куплено 2 кг слив, из которых мякоть составит  $\frac{4}{3}$  кг, а у второго будет куплено 3 кг слив, причем мякоть составит 1,5 кг. Таким образом, покупать сливы у второго выгоднее.

**11.** В приведенном решении ошибок нет, но полученный ответ показывает, что, работая втроем, мальчики потратят на покраску забора больше времени, чем Игорь и Паша, работая вдвоем, значит, производительность Володи выражается отрицательным числом. Следовательно, числа в условии задачи подобраны неправильно.

К такому же выводу можно прийти, если полностью решить составленную систему уравнений:  $i = 5/36$ ,  $p = 1/9$ ,  $v = -1/36$ .

**12.** Условие задачи некорректно: данные, указанные в условии задачи, несовместны. Иначе приведенные рассуждения были бы почти верными. Не учтено только, что при различных случаях расположения кораблей угол между лучами, на которых они находятся, может быть как  $\angle AOB$ , так и дополняющий его до  $180^\circ$ .

Показать некорректность условия можно, если подробно разобрать все возможные случаи, но, на наш взгляд, это удобнее сделать, используя

геометрическую интерпретацию.

*Первый способ.* Пусть точки  $A$ ,  $A_1$  и  $A_2$  соответствуют последовательным положениям первого корабля, а  $B$ ,  $B_1$  и  $B_2$  – второго корабля. Так как корабли движутся равномерно, то  $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2}$  и  $\overline{BB_1} = \overline{B_1B_2}$ . Тогда  $\overline{A_1B_1} = \overline{A_1A} + \overline{AB} + \overline{BB_1}$  и  $\overline{A_1B_1} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2B_2} + \overline{B_2B_1}$ . Складывая эти равенства, получим  $\overline{2A_1B_1} = \overline{AB} + \overline{A_2B_2}$ . Следовательно,  $2|\overline{A_1B_1}| = |\overline{AB} + \overline{A_2B_2}| \leq |\overline{AB}| + |\overline{A_2B_2}|$ . Подставив данные из условия задачи, получим противоречие:  $2 \cdot 5 \leq 6 + 2$ .

*Второй способ.* Перейдем в систему отсчета, связанную с первым кораблем. Тогда второй корабль движется относительно него равномерно и прямолинейно (рис. 7).

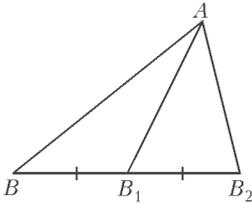


Рис. 7

Из условия задачи следует, что  $AB = 6$ ,  $AB_1 = 5$ ,  $AB_2 = 2$ . Это невозможно, так как должно выполняться неравенство  $AB + AB_2 \geq 2AB_1$ .

**МОСКОВСКИЙ ТУР ВСЕРОССИЙСКОЙ  
СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО ФИЗИКЕ  
2017 ГОДА**

1. Пусть  $h$  и  $H$  – расстояния от точек  $A$  и  $B$  до стенки. Длина траектории частицы равна

$$vt = \frac{h}{\cos \alpha} + \frac{H}{\cos \beta}.$$

Из условия экстремума,

$$-\frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha - \frac{H \sin \beta}{\cos^2 \beta} d\beta = 0. \quad (1)$$

Расстояние вдоль плоскости стенки равно

$$\frac{h \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{H \sin \beta}{\cos \beta} = \text{const},$$

откуда после дифференцирования получаем

$$\frac{hd\alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{Hd\beta}{\cos^2 \beta} = 0, \text{ или } \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{h \cos^2 \beta}{H \cos^2 \alpha}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\sin \alpha = \sin \beta.$$

2. Уравнение движения тела имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = r(v_0 - v)^2.$$

С учетом начального условия  $v(0) = 0$ , полу-

чаем

$$v(t) = \frac{rv_0^2 t}{rv_0 t + m}.$$

В момент вылета

$$v(t_k) = \frac{rv_0^2 t_k}{rv_0 t_k + m} = \frac{v_0}{2}, \text{ откуда } t_k = \frac{m}{rv_0}.$$

Длина сопла равна

$$l = \int_0^{t_k} v(t) dt = \frac{m(1 - \ln 2)}{r},$$

поэтому

$$r = \frac{m}{l}(1 - \ln 2).$$

3. Ось вращения – отрезок  $b$ , соединяющий точки подвеса. Высота прямоугольного треугольника с вершиной в точке, где находится тело, равна  $H = \sqrt{2h^2 - b^2} = h$ . Колебания происходят в плоскости, перпендикулярной отрезку  $b$ . Угол между этим отрезком и вертикалью  $\frac{\pi}{3}$ . Приведенное ускорение свободного падения (к плоскости колебаний) равно  $\tilde{g} = g \cos \frac{\pi}{3}$ , откуда находим период колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{\tilde{g}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\sqrt{3}h}{3g}}.$$

4. Запишем уравнение состояния газа:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

и уравнение политропы:

$$(V - b)T = d.$$

Отсюда получаем

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} = \frac{RT^2}{d} - \frac{a}{V^2}, \quad dV = -\frac{d}{T^2},$$

$$dU = CdT + \frac{a}{V^2} dV,$$

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV =$$

$$= \frac{1}{T} \left( C_V dT + \frac{a}{V^2} dV + \frac{RT^2}{d} \left( -\frac{d}{T^2} \right) - \frac{a}{V^2} dV \right) = (C_V - R) \frac{dT}{T}, \quad \Delta S = (C_V - R) \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

5. Потенциал в центре создается четырьмя прямоугольниками со сторонами  $\frac{a}{2}$  и  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ . Потенциал пропорционален размеру прямоугольника:  $\Phi_0 = 4\gamma \frac{a}{2}$ . Потенциал в середине большей стороны создается двумя прямоугольниками со сто-

ронами  $a$  и  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ , откуда

$$\varphi_1 = 2\gamma \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}}.$$

Потенциал в вершине прямоугольника создается одним прямоугольником со сторонами  $a$  и  $\sqrt{2}a$ :

$$\varphi_2 = \gamma a = \frac{\varphi_0}{2}.$$

6. Ток по всему полупространству равен

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \alpha \cos \theta \sin \theta \cdot d\theta = \alpha \pi.$$

Из соображений симметрии магнитное поле имеет только составляющую вдоль вектора  $\vec{e}_\varphi$  цилиндрической системы координат, ось которой совпадает с направлением тока до растекания по полупространству. Используя теорему Стокса, находим

$$2\pi r \sin \theta_0 \cdot B = \mu_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} \frac{I}{\pi} \cos \theta \sin \theta \cdot d\theta = \mu_0 I \sin^2 \theta_0,$$

откуда

$$B = \frac{\mu_0 I \sin \theta_0}{2\pi r}.$$

7. Магнитное поле равно

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Пусть дипольный момент рамки с током  $I_0$  со стороной  $a \ll r$  равен  $p_m = I_0 a^2$ . Сила, действующая на рамку, равна

$$F = I_0 a \Delta B = I_0 a \frac{dB}{dr} a = p_m \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}.$$

С другой стороны,

$$F = \frac{mv^2}{r}.$$

Отсюда находим

$$m = \frac{p_m I \mu_0}{2\pi r v^2}.$$

8. Поскольку волны некогерентны, а угол между плоскостями поляризации частично поляризованной волны и плоскополяризованной волны с интенсивностью  $I_1$  равен  $\alpha$ , то

$$I_\alpha = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 (\varphi - \alpha).$$

Пусть задан угол  $\varphi = \text{const}$ . Найдем, при каком угле  $\alpha$  величина  $I_\alpha$  достигает максимума:

$$\frac{dI_\alpha}{d\alpha} = -2I_1 \cos \alpha \sin \alpha + 2I_2 \cos (\varphi - \alpha) \sin (\varphi - \alpha) = 0.$$

Тогда связь между углами  $\varphi$  и  $\alpha$  записывается в виде

$$I_1 \sin 2\alpha = I_2 \sin 2(\varphi - \alpha).$$

Поскольку угол  $\alpha$  дан, угол между плоскополяризованными волнами равен

$$\varphi = \alpha + \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{I_1}{I_2} \sin 2\alpha \right).$$

## ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ-2018».

### ФИЗИКА

#### ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

7–9 классы

Первый тур

1. Поскольку сила тяжести, действующая на груз, равна  $mg$ , по закону Гука имеем  $k\Delta l = mg$ . Отсюда находим удлинение пружины под действием веса груза и длину пружины:

$$\Delta l = \frac{mg}{k}, \quad l = l_0 + \Delta l = l_0 + \frac{mg}{k}.$$

2. По закону сложения скоростей скорость шайбы относительно бруска равна  $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{u}$ . Поскольку векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{u}$  направлены в противоположные стороны, модуль скорости сближения шайбы с бруском равен  $v_{\text{отн}} = v + u$ . Время, прошедшее до столкновения шайбы с бруском, равно  $t_1 = \frac{L}{v+u}$ . За это время шайба переместится от точки  $A$  на расстояние  $L_1 = vt_1 = \frac{Lv}{v+u}$ . После

столкновения шайбы с массивным бруском скорость бруска не изменится. Для нахождения скорости шайбы после столкновения с бруском учтем, что в системе, связанной с бруском, в момент удара сохраняется кинетическая энергия шайбы, поэтому модуль скорости шайбы относительно бруска останется равным  $v_{\text{отн}} = v + u$ , а направление скорости изменится на противоположное. Переходя вновь в неподвижную систему отсчета, по закону сложения скоростей получаем, что модуль скорости шайбы в этой системе станет равным  $v + 2u$ . После соударения с бруском шайба пройдет расстояние  $L_1$  до точки  $A$  за время  $t_2 = \frac{L_1}{(v+u)(v+2u)}$ . Время, через которое шайба снова окажется в точке  $A$ , равно

$$\tau = t_1 + t_2 = \frac{2L}{v+2u}.$$

3. Пусть мощность, передаваемая спиралью содержимому калориметра, равна  $P$ . Поскольку в момент включения спирали смесь воды и льда находилась в состоянии термодинамического равновесия, т.е. при температуре таяния льда, то  $m_1 \lambda = P \tau_1$ . По условию, на нагрев образовавшейся и имевшейся ранее в калориметре воды потребовалось время  $\tau_2$ . Следовательно,

$(m_{\text{л}} + m_{\text{в}})c\Delta t = P\tau_2$ . Отсюда

$$n = \frac{m_{\text{в}}}{m_{\text{л}}} = \frac{\lambda\tau_2}{c\Delta t\tau_1} - 1.$$

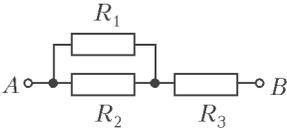


Рис. 8

4. Эквивалентная схема цепи изображена на рисунке 8, где резисторы сопротивлением  $R_2$  и  $R_3$  представляют собой левый и правый участки реостата. При этом  $R_2 = \frac{Rx}{L}$ ,  $R_3 = \frac{R(L-x)}{L}$ . Сопротивление двух параллельно соединенных резисторов равно  $R' = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ . Полное сопротивление цепи составляет

$$R_{AB} = R' + R_3 = R\left(\frac{R_1x}{R_1L + Rx} + \frac{L-x}{L}\right).$$

5. Ход луча, падающего на зеркало и отраженно от него, изображен на рисунке 9. Видно, что

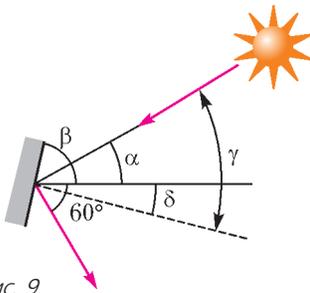


Рис. 9

угол между падающим лучом и нормалью к зеркалу равен  $\gamma = \frac{1}{2}(60^\circ + \alpha) = 30^\circ + \frac{\alpha}{2}$ . Угол между нормалью к зеркалу и горизонтом равен  $\delta = \gamma - \alpha = 30^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . Согласно теореме о равенстве углов с взаимно перпендикулярными сторонами, такой же угол зеркало образует с вертикалью. Поэтому искомый угол равен  $\beta = 90^\circ - \delta = 60^\circ + \frac{\alpha}{2}$ .

*Второй тур*

1. Поскольку сила тяжести, действующая на мальчика, равна  $mg$ , давление, оказываемое им на снег, равно

$$p = \frac{mg}{S}.$$

2. При подъеме гири шнур растягивается на величину  $\Delta L = \frac{mg}{k}$ , при этом силой упругости совершается работа  $A_1 = \frac{k(\Delta L)^2}{2} = \frac{(mg)^2}{2k}$ . Кроме

того, в поле тяготения совершается работа  $A_2 = mgh$ . Полная работа, совершенная при подъеме гири, равна  $A = A_1 + A_2 = \frac{(mg)^2}{2k} + mgh$ .

Отсюда относительно  $m$  получается квадратное уравнение  $m^2 + \frac{2kh}{g}m - \frac{2kA}{g^2} = 0$ . Условию задачи удовлетворяет только положительный корень:

$$m = \frac{kh}{g}\left(\sqrt{\frac{2A}{kh^2} + 1} - 1\right).$$

3. Количество теплоты, необходимое для плавления льда массой  $m_{\text{л}}$  при постоянной температуре  $0^\circ\text{C}$ , равно  $Q_1 = \lambda m_{\text{л}}$ . Количество теплоты, которое идет на нагревание всей получившейся воды в сосуде до температуры кипения  $t_{\text{к}}$ , равно  $Q_2 = c(m_{\text{л}} + m_{\text{в}})(t_{\text{к}} - 0^\circ\text{C})$ . Эти тепловые энергии получены системой за времена  $\tau_1$  и  $\tau_2$  от источника с постоянной мощностью теплопередачи  $P$ , т.е.  $Q_1 = P\tau_1$ ,  $Q_2 = P\tau_2$ . Отсюда находим отношение масс воды и льда:  $\frac{m_{\text{в}}}{m_{\text{л}}} = \frac{\lambda\tau_2}{c(t_{\text{к}} - 0^\circ\text{C})\tau_1} - 1$ . Затем, учитывая равенство  $m = m_{\text{л}} + m_{\text{в}}$ , находим искомую массу воды:

$$m_{\text{в}} = m \frac{\lambda\tau_2 - c(t_{\text{к}} - 0^\circ\text{C})\tau_1}{\lambda\tau_2}.$$

4. Поскольку резисторы соединены параллельно, справедливо равенство  $I_1R_1 = I_2R_2$ . Кроме того, ток в неразветвленной цепи равен  $I = I_1 + I_2$ . Из этой системы уравнений находим  $I = \frac{R_1 + R_2}{R_1}I_2$ . По закону Джоуля-Ленца,  $P = R_{\text{общ}}I^2$ , где  $R_{\text{общ}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ . Из записанных выражений находим

$$P = \frac{(R_1 + R_2)R_2}{R_1}I_2^2.$$

5. Поскольку пленка находится в фокальной плоскости объектива, величина размытия точек изображения будет определяться крайними лучами, прошедшими через объектив. Пусть диаметр объектива равен  $D$ . Из рисунка 10 видно, что  $\frac{D}{d} = \frac{b}{a - F}$ . Из формулы тонкой линзы  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$  следует, что  $b = \frac{aF}{a - F}$ . Подставляя

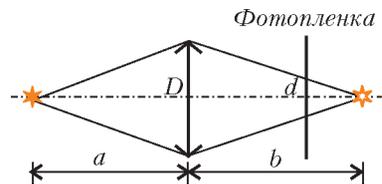


Рис. 10

это значение  $b$  в формулу для  $\frac{D}{d}$ , получаем  $\frac{D}{d} = \frac{a}{F}$ . Окончательно находим

$$d = \frac{kF^2}{a}.$$

10–11 классы

Первый тур

1. Будем отсчитывать координату груза относительно точки подвеса пружины, координатную ось  $x$  направим вниз. Пусть длина недеформированной пружины  $l_0$ , а ее жесткость  $k$ . Тогда координата положения равновесия груза  $x_0$  определится из условия  $mg = k(x_0 - l_0)$ , откуда  $x_0 = l_0 + mg/k$ . Груз совершает колебания относительно положения равновесия с амплитудой  $A$ , поэтому в нижней точке координата груза будет  $x_{\max} = x_0 + A$ . По закону Гука сила растяжения пружины при этом равна  $F = k(x_{\max} - l_0) = mg + kA$ . Поскольку период колебаний груза равен  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ , жесткость пружины равна  $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$ . Следовательно,

$$F = m\left(g + \frac{4\pi^2 A}{T^2}\right).$$

2. Поскольку смещения шарика и клина за время соударения пренебрежимо малы и трение отсутствует, то сила взаимодействия шарика и клина направлена по нормали к наклонной плоскости. Следовательно, изменение импульса шарика  $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$  при ударе также будет направлено по нормали к наклонной плоскости клина (рис. 11; здесь  $\vec{v}_0$  и  $\vec{v}$  – скорости шарика до и

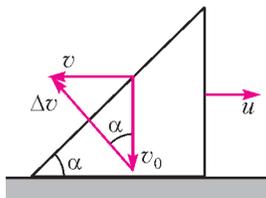


Рис. 11

после удара соответственно,  $\vec{u}$  – скорость клина после удара). Из рисунка видно, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{v_0}$ .

По закону сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление,  $mv = Mu$ . По закону сохранения кинетической энергии при упругом ударе,  $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}$ . Отсюда нахо-

дим  $u = v \frac{m}{M}$ ,  $v_0 = v\sqrt{1 + \frac{m}{M}}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{M}{M+m}}$  и  $\alpha = \arctg \sqrt{\frac{M}{M+m}}$ .

3. Работа газа в циклическом процессе равна алгебраической сумме количеств теплоты, которыми газ обменивается с нагревателем и холодильником:  $A = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}$ . Полученное газом количество теплоты равно  $Q = Q_{12} + Q_{23}$ .

Следовательно, КПД цикла равен  $\eta = \frac{A}{A - Q_{31}}$ , причем  $Q_{31} < 0$ . По первому закону термодинамики,  $Q_{31} = \frac{3}{2}vR(T_1 - T_3) + A_{31}$ , где  $A_{31} = \frac{1}{2}(p_1 + p_3)(V_1 - V_3)$ . Поскольку продолжение прямой 1–3 проходит через начало координат, справедливо равенство  $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_3}{V_3}$ , с учетом которого выражение для  $A_{31}$  преобразуется к виду  $A_{31} = \frac{1}{2}(p_1V_1 - p_3V_3)$ . Используя уравнения состояния  $p_1V_1 = vRT_1$ ,  $p_3V_3 = vRT_3$ , находим  $A_{31} = \frac{1}{2}vR(T_1 - T_3)$ . Следовательно,  $Q_{31} = 2vR(T_1 - T_3)$ , и

$$\eta = \frac{A}{A - Q_{31}} = \frac{A}{A + 2vR(T_3 - T_1)} \cdot 100\%.$$

4. Пусть пластинка вдвинута в конденсатор на расстояние  $x$ , отсчитываемое от нижнего края пластинки до верхнего края обкладок конденсатора. Емкость конденсатора при этом равна

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 l x}{d_0 - d} + \frac{\varepsilon_0 l (l - x)}{d_0} = \frac{\varepsilon_0 l (l(d_0 - d) + xd)}{d_0(d_0 - d)},$$

а его заряд равен  $q(x) = C(x)U$ , где  $U$  – напряжение между обкладками конденсатора. При равномерном движении пластинки ток зарядки конденсатора, сначала равный нулю, довольно быстро возрастает до установившегося значения, т.е. становится практически постоянным и равным  $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 l v d}{d_0(d_0 - d)}U$ . Учитывая, что напряжение на конденсаторе равно  $U = \varepsilon - IR$ , находим окончательно

$$I = \frac{\varepsilon_0 l v d \varepsilon}{d_0(d_0 - d) + \varepsilon_0 l v d R}.$$

5. Когда линза не повернута, изображение находится от нее на расстоянии, равном  $2F$ . Ход лучей при построении изображения, даваемого повернутой линзой, приведен на рисунке 12 красными линиями. Так как один из лучей совпадает

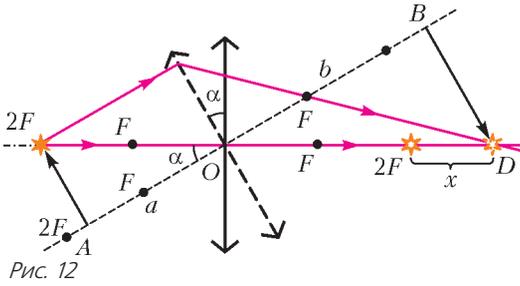


Рис. 12

с главной оптической осью не повернутой линзы, изображение источника при повороте линзы останется на той же прямой. Введем следующие обозначения:  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OD = y$ . Тогда  $x = y - 2F$ . Из подобия треугольников имеем  $\frac{2F}{a} = \frac{y}{b}$ , откуда  $y = \frac{2bF}{a}$ , причем  $a = 2F \cos \alpha$ . Из формулы тонкой линзы следует, что  $b = \frac{aF}{a - F}$ . Объединяя записанные выражения, находим, что  $y = \frac{2F}{2 \cos \alpha - 1}$ . Тогда

$$x = \frac{4F(1 - \cos \alpha)}{2 \cos \alpha - 1}.$$

*Второй тур*

1. Условие равновесия грузика имеет вид  $mg = 2F \sin \alpha$ , где  $F$  – сила натяжения одной из половин пружины,  $\alpha$  – угол, который составляет половина пружины с горизонталью (рис.13).

По закону Гука,  $F = k_1 \left( \frac{l}{2} - \frac{l_0}{2} \right)$ , где  $k_1$  – коэффициент упругости половины пружины,  $\frac{l}{2} = \sqrt{\left( \frac{l_0}{2} \right)^2 + h^2}$  – длина половины пружины в растянутом состоянии. Синус угла  $\alpha$  определяется формулой  $\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{(l_0/2)^2 + h^2}}$ . Коэффициент упругости пружины равен отношению силы упругости к удлинению пружины. Удлинение половины пружины вдвое меньше удлинения всей пружины. Отсюда  $k_1 = 2k$ . Из приведенных урав-

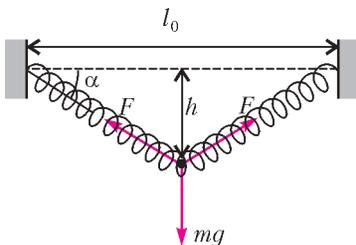


Рис. 13

нений находим

$$k = \frac{mg}{4h} \frac{\sqrt{l_0^2 + 4h^2}}{\sqrt{l_0^2 + 4h^2} - l_0}.$$

2. Перейдем в систему отсчета, равномерно движущуюся со скоростью, которую имела граната непосредственно перед разрывом. В этой системе суммарный импульс осколков равен нулю, поэтому их скорости после разрыва противоположны по направлению и, в силу равенства их масс, равны по величине. В результате взрыва осколки приобретают кинетическую энергию  $E$ , которая поровну делится между ними. Обозначив через  $v$  модуль скорости каждого из осколков, имеем  $E = \frac{m}{2} \frac{v^2}{2} + \frac{m}{2} \frac{v^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$ , откуда  $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ . Время падения осколков равно  $t_0 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ . За это время каждый из осколков смещается по горизонтали на расстояние  $vt_0$ . Расстояние между точками падения равно  $l = 2vt_0$ . Объединяя записанные выражения, получаем

$$l = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

3. Удобно перейти к представлению цикла в координатных осях  $p, V$  (рис.14). График пред-

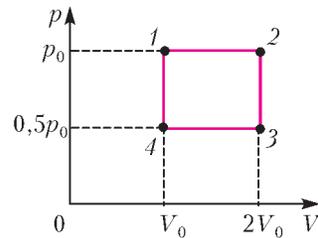


Рис. 14

ставляет собой прямоугольник, а работа газа измеряется его площадью, т.е.

$$A = \left( p_0 - \frac{p_0}{2} \right) (2V_0 - V_0) = \frac{1}{2} p_0 V_0.$$

Разность внутренних энергий в состояниях 2 и 4 по условию задачи равна  $\Delta U = \frac{3}{2} U_0$ . Соответственно, разница максимальной и минимальной температур в цикле составляет  $\Delta T = \frac{3}{2} T_0$ . Для идеального одноатомного газа внутренняя энергия равна  $U = \frac{3}{2} \nu RT$ . С учетом уравнения состояния идеального газа  $pV = \nu RT$  работа

равна

$$A = \frac{1}{2} vRT_0 = \frac{1}{3} vR\Delta T.$$

4. Импульс силы Ампера за время  $\tau$  равен  $I_0BL\tau$ . По второму закону Ньютона,  $mv_0 = I_0BL\tau$ , откуда скорость, которую приобретает стержень по окончании импульса тока, равна  $v_0 = \frac{I_0BL\tau}{m}$ . Уравнение движения стержня по окружности в верхней точке траектории имеет вид  $\frac{mv^2}{l} = mg + T$ , где  $T$  – суммарное натяжение нитей. Скорость стержня в верхней точке минимальна, если  $T = 0$ . Следовательно,  $v^2 = gl$ . В соответствие с законом сохранения энергии,  $\frac{mv_0^2}{2} = 2mgl + \frac{mv^2}{2} = \frac{5}{2}mgl$ , откуда  $v_0 = \sqrt{5gl}$ . Объединяя записанные выражения, находим

$$\tau = \frac{m\sqrt{5gl}}{BLI_0}.$$

5. По формуле тонкой линзы,  $D = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ , где  $a$  и  $b$  расстояния от линзы до источника  $S$  и до его мнимого изображения  $S_1$  соответственно. Согласно рисунку 15,  $\frac{a}{b} = \frac{h}{h_1}$  и  $a - b =$

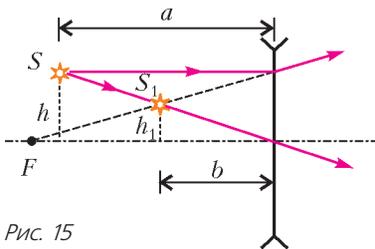


Рис. 15

$= \sqrt{l^2 - (h - h_1)^2}$ . Из записанных равенств следует, что  $D = \frac{h - h_1}{ah_1}$  и  $a = \frac{h}{h - h_1} \sqrt{l^2 - (h - h_1)^2}$ . Окончательно получаем

$$D = \frac{(h - h_1)^2}{hh_1 \sqrt{l^2 - (h - h_1)^2}}.$$

### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

7–8 классы

1. Давления, оказываемые бруском на горизонтальную поверхность, равны  $p_i = \frac{F}{S_i}$ , где  $F = mg$  – сила тяжести, действующая на брусок,  $S_i$  – площади поверхностей его граней ( $i = 1, 2, 3$ ).

Если  $S_1 = ab$ ,  $S_2 = bc$ ,  $S_3 = ac$ , то  $p_1 = \frac{mg}{ab}$ ,  $p_2 = \frac{mg}{bc} = 5p_1 = 5\frac{mg}{ab}$  и  $p_3 = \frac{mg}{ac} = \frac{p_2}{2} = \frac{5p_1}{2} = \frac{5mg}{2ab}$ . Отсюда следует, что  $a = 5c$ ,  $b = \frac{5}{2}c$  и  $a = 2b$ . Поэтому можно записать, что  $p_1 = \frac{mg}{ab} = \frac{mg}{2b \cdot b}$ , откуда  $b = \sqrt{\frac{mg}{2p_1}} = 0,05$  м. Тогда  $c = 0,02$  м,  $a = 0,1$  м и  $V = abc = 0,0001$  м<sup>3</sup>. Следовательно, плотность бруска равна

$$\rho = \frac{m}{V} = 8000 \text{ кг/м}^3 = 8 \text{ г/см}^3.$$

2. Поскольку по условию тепловые потери пропорциональны времени, количественной характеристикой потерь является их мощность  $w$ . Обозначив через  $m$  массу воды, по первому закону термодинамики имеем  $Wt_1 = cm\Delta T = wt_1$  (при нагревании воды) и  $cm\Delta T = wt_2$  (при остывании воды). Отсюда получаем

$$m = \frac{Wt_1t_2}{c\Delta T(t_1 + t_2)} \approx 2,4 \text{ кг}.$$

3. В первом случае общее сопротивление цепи равно  $R_1 = \frac{R+r}{2}$ , а мощность равна  $P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{2U^2}{R+r}$ , где  $U$  – напряжение между точками  $A$  и  $B$ . После того как одну из ламп заменили резистором, общее сопротивление цепи стало  $R_2 = \frac{2R(R+r)}{3R+r}$ , а мощность стала  $P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{U^2(3R+r)}{2R(R+r)}$ . По условию задачи,  $P_2 = kP_1$ . Отсюда получаем

$$r = (4k - 3)R = 15 \text{ Ом}.$$

4. Ход лучей до и после отражения от зеркала представлен на рисунке 16. Расстояния от уров-

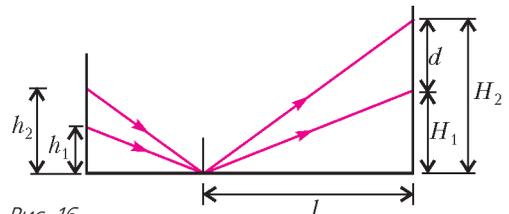


Рис. 16

ня стола до световых пятен на стене  $H_1$  и  $H_2$ . Из подобия треугольников имеем  $\frac{h_1}{L-l} = \frac{H_1}{l}$  и

$$\frac{h_2}{L-l} = \frac{H_2}{l} \text{ . Искомое расстояние равно}$$

$$d = H_2 - H_1 =$$

$$= \frac{lh_2}{L-l} - \frac{lh_1}{L-l} = \frac{l}{L-l}(h_2 - h_1) = 18 \text{ см .}$$

*9 класс*

1. Из выражения для дальности полета шарика  $L = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$  следует, что при фиксированной начальной скорости  $v_0$  существуют две траектории, двигаясь по которым шарик попадет в заданную точку. Эти траектории соответствуют двум углам бросания  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , связанным соотношением  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ . Поскольку модуль скорости шарика после упругого соударения с пластинкой не изменяется, вектор скорости шарика после удара должен составлять с горизонтом один из этих углов. Таким образом, пластинку следует установить либо перпендикулярно к направлению скорости шарика перед ударом, т.е. под углом

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha = 60^\circ$$

к горизонтали, либо перпендикулярно биссектрисе угла между двумя возможными направлениями скорости, т.е. под углом

$$\beta_2 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

2. Если  $V_0$  – начальный объем льда, то согласно закону Архимеда должно выполняться условие  $F_1 + \rho_{\text{л}} V_0 g = \rho_{\text{в}} V_0 g$ . Отсюда  $V_0 = \frac{F_1}{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})g} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ , а начальная масса льда  $m_{\text{л}} = \frac{\rho_{\text{л}} F_1}{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})g} = 2,7 \text{ кг}$ . Количество теплоты, которое отдаст вода при охлаждении до  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ , равно  $Q_1 = mc_{\text{в}}(t_1 - t_0) = 415,8 \text{ кДж}$ . Количество теплоты, которое требуется для расплавления всего льда, равно  $Q_2 = m_{\text{л}} \lambda = 891 \text{ кДж}$ . Из сопоставления этих данных следует, что тепловое равновесие в калориметре установится при температуре  $t_0 = 0^\circ \text{C}$  и расплавится не весь лед. В калориметре останется лед объемом  $V$ , который, согласно уравнению теплового баланса, можно определить из условия  $\lambda \rho_{\text{л}} (V_0 - V) = mc_{\text{в}}(t_1 - t_0)$ . В соответствии с законом Архимеда при этом справедливо равенство  $F_2 + \rho_{\text{л}} V g = \rho_{\text{в}} V g$ . Из приведенных соотношений получаем

$$F_2 = F_1 - \frac{mgc_{\text{в}}(t_1 - t_0)(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\lambda \rho_{\text{л}}} = 1,6 \text{ Н}.$$

3. Поскольку резисторы сопротивлениями  $R_1$  и  $R_5$  соединены параллельно, их можно заменить

одним резистором сопротивлением  $R = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_5}$ , который соединен последовательно с резисторами сопротивлениями  $R_2$  и  $R_3$ . Согласно закону Ома, сила тока, текущего через эти резисторы, равна  $I = \frac{U}{R_2 + R_3 + R}$ . Токи, текущие через параллельно соединенные резисторы, распределяются обратно пропорционально их сопротивлениям, поэтому ток, текущий через резистор сопротивлением  $R_1$ , равен  $I_1 = I \frac{R_5}{R_1 + R_5}$ . Искомая мощность равна

$$P = I_1^2 R_1 = \frac{U^2 R_5^2 R_1}{((R_2 + R_3)(R_1 + R_5) + R_1 R_5)^2} = 0,8 \text{ Вт}.$$

4. Из рассеивающей линзы будет выходить параллельный пучок света, если изображение источника, создаваемое собирающей линзой, будет находиться в правом фокусе рассеивающей линзы. По формуле тонкой линзы имеем  $\frac{1}{F_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{l + F_2}$ , откуда  $l + F_2 = \frac{a F_1}{a - F_1}$ . Следовательно,

$$F_2 = \frac{a F_1}{a - F_1} - l = 10 \text{ см}.$$

*10–11 классы*

1. Брусok сдвинется с места, когда сила натяжения нити  $T$  превысит максимальное значение силы трения покоя между бруском и столом, т.е. при  $T > \mu M g$ . В свою очередь, по закону Гука,  $T = k y$ , где  $y$  – удлинение пружины. Найдем  $y(\tau) = y_0$  в момент времени  $\tau$ . Совместим начало отсчета с нижним концом недеформированной пружины, координатную ось  $y$  направим вертикально вниз. По второму закону Ньютона для груза имеем  $m y'' = m g - k y$  с начальными условиями  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , где штрихами обозначены производные по времени. Заменой переменных  $\eta = y - \frac{m g}{k}$  уравнение движения груза приводится к уравнению  $\eta'' + \frac{k}{m} \eta = 0$ , описывающему гармонические колебания с круговой частотой  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . С учетом начальных условий  $\eta(0) = -\frac{m g}{k}$  и  $\eta'(0) = 0$  решение этого уравнения имеет вид  $\eta(t) = -\frac{m g}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$ . Переходя вновь к исходной переменной  $y$ , находим  $y_0 = \frac{m g}{k} \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \tau\right)\right)$ . Подставляя это значение в уравнение  $\mu M g = k y_0$ , получаем искомый

коэффициент трения:

$$\mu = \frac{m}{M} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} \tau \right) \right) = 0,1.$$

2. Работа, совершенная газом в рассматриваемом процессе, равна  $A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)$ , изменение внутренней энергии газа равно  $\Delta U = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$ . Согласно первому закону термодинамики,

$$Q = A + \Delta U = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1).$$

Искомое отношение равно

$$k = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{4p_2V_2 - 4p_1V_1 + p_1V_2 - p_2V_1}{3(p_2V_2 - p_1V_1)} = \frac{4mn - 4 + m - n}{3(mn - 1)} = \frac{5}{2}.$$

3. Стержень придет в движение под действием силы Ампера  $F_A = IBl$ , где  $I$  – сила тока в цепи. Используя закон электромагнитной индукции и правило Ленца, находим, что при движении стержня со скоростью  $v$  на его концах возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bvl$ , действующая против ЭДС источника. По закону Ома для замкнутой цепи,  $I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}$ . По второму закону Ньютона,  $ma = F_A - F_{\text{тр}}$ , где  $a$  – ускорение стержня, а  $F_{\text{тр}} = \mu mg$  – модуль силы трения скольжения. При установившемся движении стержня  $a = 0$ ,  $v = v_0$ . Из записанных выражений следует равенство  $\frac{(\mathcal{E} - Bv_0l)Bl}{R} = \mu mg$ , откуда

$$v_0 = \frac{1}{Bl} \left( \mathcal{E} - \frac{\mu mg R}{Bl} \right) = 1 \text{ м/с}.$$

При  $\mathcal{E} \leq \frac{\mu mg R}{Bl} = 10 \text{ В}$  стержень не сдвинется с места и его скорость будет равна нулю.

4. При прямолинейном движении светящейся точки ее изображение будет двигаться также по прямой. Из рисунка 17 видно, что  $\text{tg} \alpha = \frac{H}{d}$ ,

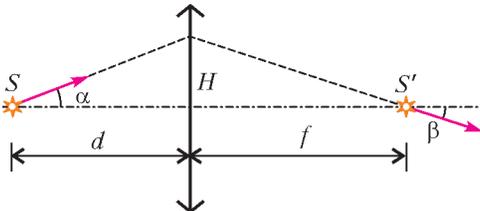


Рис. 17

$\text{tg} \beta = \frac{H}{f}$ , откуда  $\text{tg} \beta = \frac{d}{f} \text{tg} \alpha$ . Применив формулу линзы  $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ , находим  $\text{tg} \beta = \frac{d - F}{F} \text{tg} \alpha$ . Таким образом,

$$\beta = \arctg \left( \frac{d - F}{F} \text{tg} \alpha \right) \approx \arctg(0,29) \approx 16^\circ,$$

причем изображение удаляется от линзы.

# КВАНТ

12+

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: (495) 930-56-48**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами**

**в типографии ООО «ТДС-СТОЛИЦА-8»**

**Телефон: (495) 363-48-86,**

**http://capitalpress.ru**

## На турнире ПРЕТЕНДЕНТОВ

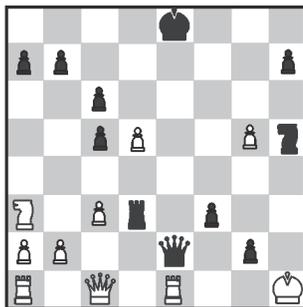
В марте 2018 года в Берлине состоялся турнир претендентов, победителем которого стал американский гроссмейстер Фабиано Каруана. Он получил право сразиться в конце года в матче за звание чемпиона мира с действующим обладателем титула, Магнусом Карлсеном. Турнир подарил множество ярких и красивых партий.

Владимир Крамник, четырнадцатый чемпион мира, удачно стартовал и показывал интересную творческую игру до самого конца турнира, однако упустил выигрывать в нескольких партиях, в которых имел серьезное преимущество, что не позволило ему бороться за итоговую победу. Его партия с Леоном Ароняном стала настоящим украшением турнира и наверняка будет претендовать на звание лучшей партии 2018 года.

### Л.Аронян – В.Крамник

1. e4 e5 2. ♘f3 ♗c6 3. ♙b5 ♘f6 4. d3 ♙c5 5. ♗c6 dс 6. 0-0 ♗e7 7. h3 ♗g8! Домашняя подготовка В.Крамника. Черные угрожают вскрыть линию g посредством g7-g5-g4 с атакой на короля. Такая дерзкая игра в дебюте возможна благодаря тому, что белые не могут быстро организовать контригру в центре. 8. ♘h1 ♗h5 9. c3 g5 10. ♘e5 g4 (10... ♗e5? 11. d4 ♗e7 12. ♗h5) 11. d4 ♙d6 12. g3 ♙e5 13. de ♗e5 14. ♗d4 ♗e7! Черные уклоняются от возможности перейти в лучший эндшпиль, рассчитывая на силу своей атаки. 15. h4 c5 16. ♗c4? Необходимо было сохранить контроль над полем f5: 16. ♗d3 ♙d7 17. c4 0-0 18. ♘c3 ♙с6, и позиция белых остается обороноспособной. Теперь же атака черных усиливается за счет слабости белых полей. 16... ♙e6 17. ♗b5+

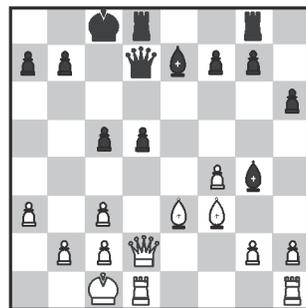
c6 18. ♗a4 f5! 19. ♙g5 (19. ef ♙g3! 20. fg ♙d5 21. ♘g1 ♗e2! с матом) 19... ♗g5! Необходимая жертва для поддержания скорости атаки. 20. hg f4 21. ♗d1 ♗d8 22. ♗c1 fg 23. ♙a3 ♗d3 24. ♗d1 ♙d5 25. f3 gf 26. ed (26. ♗d3 ♗e4 27. ♗e3 f2+ 28. ♗e4 ♙e4×!) 26... ♗e2 27. ♗e1 g2+. Черные сдались ввиду неизбежного мата. Финальная позиция достойна отдельной диаграммы: такие яркие атаки редко случаются в партиях современных гроссмейстеров экстра-класса.



Победитель предыдущего турнира претендентов, Сергей Карякин, неудачно стартовал, однако затем ему удалось серия из 4 побед подряд, венчала которую партия с Каруаной. В ней Карякин нанес будущему победителю единственное поражение в турнире.

### С.Карякин – Ф.Каруана

1. e4 e5 2. ♘f3 ♙f6 3. ♘e5 d6 4. ♘f3 ♙e4 5. ♘c3 ♙c3 6. dc ♙c6 7. ♙e3 ♙e7 8. ♗d2 ♙e6 9. 0-0-0 ♗d7 10. a3 h6 11. ♘d4 ♙d4 12. ♙d4 ♗g8 (12... 0-0 опасно из-за возможности атаки по линии g) 13. ♙e2 c5 (лучше было 13...a6 или 13...♗a4, не ослабляя пешку d6) 14. ♙e3 d5 15. f4 0-0-0 16. ♙f3 ♙g4?! Логичный ход, однако белые не обязаны идти на размен слонов. 17. ♙d5! Жертвуя качество, белые получают стабильное позиционное преимущество, в то время как черным крайне сложно наладить контригру. 17... ♙d1 18. ♗d1 ♗c7 19. c4 ♗ge8 20.



♗f2 b6 21. g4 ♙f6 22. ♗b1 ♗d7 23. ♗d3. Отсюда белая ладья может быть переброшена на королевский фланг. Белые постепенно усиливают позицию, в то время как черные вынуждены стоять на месте. 23...g5? 24. ♗a2 ♗ee7 25. ♗f3 ♙d8 26. ♙d2 ♗c8 27. ♗f1! с угрозой ♗h3. Черные вынуждены отдать пешку, чтобы получить хотя бы немного пространства. 27... ♗d6 28. fg ♙g5 29. ♙g5 hg 30. ♗f5+ ♗dd7 31. ♗g5 ♗e5 32. ♗h6 ♙d8 33. g5 ♗d6 34. ♗h8+ ♗e8 35. ♗h4 ♗g6 36. ♗g4 ♗e5 37. h4. Белый слон сильнее черных ладей, а судьбу партии решают проходные пешки. 37... ♗e7 38. ♗d2 b5!? Последняя попытка усложнить борьбу. 39. ♙f7! ♗f5 40. ♗d7+ ♗d7 41. ♗f5+ ♗f5 42. g6 ♗e7 43. cb ♗h5 44. c4 ♗h4 45. a4 ♗g4 46. a5 ♙d6 47. a6 ♙c7 48. ♗b3. Черным удалось заблокировать ферзевый фланг, однако рейд белого короля на королевский фланг они остановить не в силах. Выигрыш белых.

После этой партии, за два тура до финиша турнира, С.Карякин сравнялся по очкам с Ф.Каруаной и вышел на первое место за счет победы в личной встрече. Однако американский гроссмейстер смог собраться и одержать на финише две победы, в то время как российский шахматист ограничился двумя ничейными результатами, закончив турнир на втором месте.

*А.Русанов*

Индекс 90964

# Продукты с физикой

## ПУТИ СВЕТА

«Всех делает видимыми, а сам не виден» - такую загадку можно было бы придумать про свет.

(Подробнее – на с. 46 внутри журнала)